T.C.

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

İŞLETME ANABİLİM DALI

SAYISAL YÖNTEMLER BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

ÇOK KİŞİLİ OYUNLAR VE BİR UYGULAMA

Yakup ÇELİKBİLEK

2501110646

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Öner ESEN

İSTANBUL, 2013

T.C. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER
1982 ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
TEZ ONAYI

ÖĞRENCİNİN

Adı ve Soyadı	: **YAKUP ÇELİKBİLEK**	Numarası	: **2501110646**
Anabilim/Bilim Dalı	: **SAYISAL YÖNTEMLER**	Tez Savunma Tarihi	: **09.07.2013**
Danışman	: **PROF.DR.ÖNER ESEN**	Tez Savunma Saati	: **10.30**
Tez Başlığı	: **ÇOK KİŞİLİ OYUNLAR VE BİR UYGULAMA**		

TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin **36. Maddesi** uyarınca yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin **KABULÜ'NE** OYBİRLİĞİ / ~~OYÇOKLUĞUYLA~~ karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
PROF.DR.ÖNER ESEN		Kabul
PROF.DR.MEHPARE TİMOR		Kabul
PROF.DR.ŞAKİR ESNAF	—	—

YEDEK JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
DOÇ.DR.TUĞBA GÜRSOY	—	—
DOÇ.DR.ALP BARAY		Kabul

ÇOK KİŞİLİ OYUNLAR VE BİR UYGULAMA

Yakup ÇELİKBİLEK

ÖZET

”Çok Kişili Oyun Teorisi ve Bir Uygulama” adlı bu tez çalışmasında, iki ve çok kişili oyun teorisi incelenmiş ve bir adet çok kişili oyun problemi farklı koalisyon durumlarıyla değerlendirilmiştir.

Tezin amacı; ikiden fazla oyuncusu olan piyasalarda oyuncuların farklı koalisyon durumlarında elde ettikleri kazanç farklılıklarının incelenmesidir. Bu amaçla; ilk olarak iki kişili oyun teorisi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Sonrasında bu temel de kullanılarak çok kişili oyun teorisi araştırılmıştır. Uygulama kısmında dört firmadan oluşan bir oyun modeli kurulmuş ve bu modelin farklı koalisyon durumlarında firmalara getirileri incelenmiştir. Elde edilen değerler kullanılarak dört firmanın da Shapley değerleri oluşturulmuştur. Büyük firmaların ve koalisyonların, küçük firmalar üzerinde etkisinin daha fazla olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Oyun, oyun teorisi, çok kişili, çok kişili oyun teorisi, firma, oyuncu, koalisyon, Shapley, Shapley değerleri, shapley vektörü, kukla oyuncu.

MULTI-PERSON GAME THEORY AND AN APPLICATION

Yakup ÇELİKBİLEK

ABSTRACT

In this thesis called "Multi-Person Game Theory and an Application", two−person and multi−person game theories are examined and a multi−person game problem is evaluated with different coalitions.

The aim of the thesis is to examine the profit dissimilarities of the players which is got from the different coalitions in the sectors which have more than two players. With this aim, first of all, two−person game theory is examined particularly and then multi−person game theory is researched with using this basis. In the application part, a game model which includes four firms is set up and the firms' profits are analyzed in different coalitions of this model. With using this profit values, four firms' Shapley values are generated. The results show that bigger firms and coalitions have more impact on smaller firms.

Anahtar Kelimeler: Game, game theory, multi-person, multi-person game theory, firm, player, coalition, Shapley, Shapley value, Shapley vektor, dummy player.

ÖNSÖZ

İnsanların tarih boyunca karşılaştıkları en büyük sorunlardan biri Karar Verme'dir. Hayatımızın her aşamasında karar vermek zorunda kalırız. Yapacağımız her şeyi farkında olmayarak ya da kısa süreli bir düşünmeyle de olsa karar verme neticesinde uygularız. Oturmak, koşmak, yemek, ev almak şeklinde sayılabilecek her hareketimiz bir karardır. Bazıları burada saydıklarımız gibi küçük kararlar olsa da üniversitede doğru bölümü seçmek, çalışmak için doğru mesleği (sektörü) seçmek gibi tüm hayatımızı etkileyecek, bizim için önemli, büyük kararlar da vardır. Tüm kararlarımız neticesinde bir fayda ya da zarar elde ederiz. Vermiş olduğumuz kararları da bu fayda ve zararlar çerçevesinde değerlendirerek alırız.

İnsanlar için olduğu gibi işletmeler, devletler, kamu kuruluşları gibi tüzel kişiler için de karar verme her adımda önem taşımaktadır. Özellikle günümüz piyasa koşullarında, karar verme problemleri işletmeler için daha önemli bir nokta haline gelmiştir. Alınacak olan yanlış bir kararın işletmeyi iflasa götürüp kapattırabileceği gibi yerinde ve doğru bir kararın da çok büyük karlar elde ettirerek işletmenin büyümesine ya da piyasaya hakim hale gelmesine olanak sağlayabilecek etkileri olabilmektedir.

Tüm bu durumlardan yola çıkarak gerek işletmelerde gerekse günlük hayatta karar verme problemlerini etkin bir şekilde çözebilecek farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri de Oyun Teorisi'dir.

Standart oyunlarda her bir strateji ya da karar sonrasında rakibe karşı üstünlük, fayda sağlama amaçlanır. İşletmelerin rakiplerine karşı uygulayabilecekleri hamleler neticesinde elde edebilecekleri fayda ve zararları değerlendirerek, bunları bir oyunda olduğu gibi modellemek ve piyasa için en olası sonuç(lar)a ulaşmak ve en doğru kararları verebilmek mümkün hale gelebilmektedir. Yöntem; insan kaynaklarından pazarlamaya, satın almadan muhasebeye bir işletmenin her alanına ve

her sektöre uygulanabilmektedir. Buradan da yola çıkarak tezin uygulama kısmında mobilya firmaları, reklam stratejileri ve çeşitli anketler incelenerek, dört firmadan oluşan bir piyasa oluşturulmuş ve firmaların çeşitli koalisyon durumlarında optimum sonuçlar aranmıştır.

Bu alana ilgimin artmasını ve yönelmemi sağlayan Sayın Hocalarım; Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ'ye, Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU'na, Yard. Doç. Dr. Beyza AHLATÇIOĞLU ÖZKÖK'e ve tez çalışmamın her aşamasında bilgi, destek ve katkılarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Öner ESEN'e teşekkür ederim.

Son olarak; desteklerini benden esirgemeyerek bulunduğum noktaya gelmemde büyük katkılar sağlayan aileme, yakın arkadaşlarıma ve benim için bir dosttan çok daha değerli olan Doç. Dr. Erdinç ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

Yakup ÇELİKBİLEK

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Günden güne gelişmekte olan karar verme teknikleri, gerek işletmelerde gerekse de diğer alanlarda oldukça sık başvurulan yöntemlerdir. Oyun teorisi olarak da özellikle günümüzde farklı çözüm yöntemleri de geliştirilerek pek çok yönden yer bulmakta ve uygulanabilmektedir.

Bu çalışmanın amacı da çok kişili oyunlarda; oyuncuların kurdukları koalisyonlar ve oynadıkları stratejilere göre elde ettikleri getirileri, Shapley değerlerini ve koalisyon durumlarını incelemektir.

Bu tez çalışması üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda oyun teorisinin kısa tarihçesiyle giriş yapılmıştır. Daha sonra iki kişili oyunlar ve temel oyun teorisi tanımlarına yer verilerek bu konular ayrıntılı bir şekilde aktarılmıştır.

İkinci kısım çok kişili oyun teorisi için ayrılmıştır ve ilk olarak çok kişili ortaksız oyun teorisi incelenmiştir. Daha sonra çok kişili ortaklı oyunlar aktarılmıştır. Bu kısımda ortaklı oyunların karakteristik formuna, özelliklerine ve ödemelere dair teorik bilgilere yer verilmiştir. Ardından da çok kişili oyunların iki kişili oyunlara dönüştürülmesi gösterilmiştir. İmputasyon, çekirdek ve kukla oyuncu gibi kısımlara dair teorik bilgi ve tanımlara da yer verilmiştir. Oyuncuların; koalisyon halinde; tek başlarına elde ettikleri getirilerden daha fazlasını, minimum miktarda getiri toplamlarını elde edebilecekleri görülmüştür. Bu bölüm; oyunda yer alan tüm oyuncuların oyun içindeki gücünü de temsil edebilecek olan Shapley değerlerinin bulunma yöntemleriyle sonlandırılmıştır.

Çalışmanın son kısmında; kurulan dört kişili oyun modelinde yer alan tüm oyuncular için farklı koalisyon durumları ve getirileri incelenmiştir. Sonrasında tüm oyuncuların Shapley değerleri bulunup, incelenerek sonlandırılmıştır. Piyasa gücü yüksek oyuncuların Shapley değerlerinin de yüksek olduğu görülmüştür.

1. İKİ KİŞİLİ OYUNLAR

1.1. Oyun

Günlük hayatında her insan, doğumundan ölümüne kadar, farkında olarak ya da olmayarak birçok oyun oynar. Bunlardan bazısı gündelik hayatta da oyun diye tabir ettiğimiz belli bir takım kurallara bağlı kalınarak, belli oyuncu sayılarıyla oynanan oyunlardır. Bazıları ise hiç farkında olmadan rutin olarak yaptığımız işler sırasında oyun olarak tanımlamadığımız ve her ne kadar kuralları olmadığını düşünsek de bilinçaltımızda ya da toplumun genelinde yer alan belli kurallar ya da bir takım sınırlamalar çerçevesinde, değişen oyuncu sayılarıyla oynadığımız oyunlardır.

Hemen hemen hepimizin sıklıkla oynadığı basketbol, futbol, satranç, tavla gibi kuralları ve oyuncu sayıları belirlenmiş oyunlar vardır. Bu oyunlarda oyuncular, taraflar kurallara bağlı kalarak ve belli stratejileri kullanarak kendileri için en iyi olan sonuçları elde etmeye çalışırlar. Her ne kadar en iyi sonuçları elde etmeye çalıştıklarından bahsetsek de bu tip oyunlarda genellikle tek bir tane iyi sonuç vardır: Kazanmak. Kazanmak dışında ise berabere kalmak ve kaybetmek gibi sonuçlar da vardır. Bunların dışında hepimizin çocukken oynadığı körebe, saklambaç, yakan top gibi oyunlar da aynı şekilde kurallar dahilinde – farkındalık içinde ya da farkında olmadan – oynanan ve belli sonuçlar içeren oyunlardır.

Oyunları gruplamamızı sağlayan bir takım ortak özellikleri mevcuttur. Bu ortak özellikleri inceleyecek olursak: İlk olarak tüm oyunlar belli kurallara sahiptirler ve bu kurallar çerçevesinde oynanırlar. Kurallar, oyuncuların oyun içindeki davranışlarındaki sınırlamaları, neler yapıp yapamayacaklarını veya nasıl yapabileceklerini içerir. İkincisi ise, oyunlar stratejilere sahiptirler. Stratejiler, oyuncuların oyunda sonuç elde etmek için yaptıkları davranışlar, seçenekler veya hamlelerdir. Üçüncü ve son olarak da oyunlar tek bir sonuca sahiptirler. Sonuç; oyuncuların stratejileri sonucu elde ettikleri kazanma, kaybetme, berabere kalma gibi durumlardır. Bu ortak özellikleri kullanarak bir tanım yapmaya çalışacak olursak:

Oyun; dahil olan oyuncuların stratejiler kullanarak en iyi sonucu elde etmeyi amaçladıkları, kurallarla sınırlandırılan ve yönlendirilen davranışlar bütünüdür.

1.2. Oyun Teorisi

Charles Darwin, 1871 yılında insan soyu ve evrimsel sürecine dair bir kitap[1] yayınlamış; bu kitabında da doğumlarla alakalı olarak doğal seçilim ve cinsiyet oranı konularında, doğrudan ve tanımsal bir şekilde olmasa da oyun teorisi kavramlarına değinmiştir. Francis Ysidro Edgeworth 1881 yılında yayınladığı kitabında[2], iki ürün ve iki çeşit tüketiciye dair bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmasında tarafların anlaşma eğrisinin genellemesinden bahsetmiş ve grafiklerle bu durumları açıklamıştır.

Oyun teorisine dair yayınlanmış ilk teorem hepimizin bildiği ve oynadığı satranç üzerine, Ernest Zermelo[3,4] tarafından 1913 yılında yapılmıştır. Tüm oyunlarda da olduğu gibi satranç oyununda da üç sonuç ihtimali vardır: Beyaz kazanır, siyah kazanır veyahut oyun sonunda her iki taraf da berabere kalır. Zermelo, makalesinde bu ifadelerle öne sürülen bir oyun ortaya çıkarmıştır. Aynı yıl Denes König[5] ve Laszlo Kalmar[6], Ernest Zermelo'nun makalesi üzerine çalışmış ve bu makaleyi daha geniş ve genel bir hale getirmişlerdir. Zermelo'nun kendi yayınladığı makalesi içerisinde kanıt yer almamaktadır. Kalmar ve Konig'in bildirisi ise Zermelo'nun satranç üzerine olan bu teoreminin ilk kanıtını içermektedir. Daha sonra 20'li yıllarda, Emile Borel makaleler yayınlamış ve bu makalelerinde oyun teorisini daha modern

---

[1] Charles Darwin, The Descents of Man and selection in relation to sex, New York, D. Appleton and Company, C.I-II, 1871

[2] Francis Ysidro Edgeworth, Mathematical Psychics: An Essay On the Application of Mathematics to the Moral Sciences, London, C. Kegan Paul & Co., 1881

[3] Ernest Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Cambridge, Cambridge University Press, C.II, 1913, s.501-504.

[4] Ulrich Schwalbe, Paul Walker, Zermelo and the Early History of Game Theory, C.34, Games and Economic Behaviour, 2001, s.123-137

[5] Denes König, Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, Acta Sci. Math., Szeged 3, 1927, s.121-130

[6] Lazslo Kalmàr, Zur Theorie der Abstrakten Spiele, Acta Sci. Math., Szeged 4, 1928/29, s.65-85

bir halde ifade etmiştir. Borel, iki kişili oyunlarda minimum─maksimum çözümü bulmada kullanılacak karışık stratejilerin ilk modern formülasyonunu makalesinde vermiştir. Minimum─maksimum teoreminin ispatı ise 1928 yılında John von Neuman tarafından yapılmış ve Zur Theorie der Gesellschaftsspiele[7] makalesinde yer almıştır.

1944 yılına gelindiğinde ise John von Neuman ve Oskar Morgenstern[8], bir kitap yayınlamışlardır. Bu kitaplarında, sıfır toplamlı iki kişili oyun teorisini açıklamışlar ve aynı zamanda bu kitapla birlikte devredilebilir faydalı ortaklaşa oynanan oyunların tasarımı, koalisyonel formu ve Von Neuman─Morgenstern sabit setleri gibi oyun teorisinde yeni konular, alanlar açmışlardır. Basılmasının ve yayınlanmasının hemen ardından, kitap üniversitelerde ders kitabı olarak gösterilmeye başlanmış ve oyun teorisi de özellikle matematik bölümleri olmak üzere üniversitelerde ders olarak açılmaya başlanmıştır. Minimum─maksimum teoreminin ilk olarak tam cebirsel ispatı ise 1946 yılında L. H. Loomis[9] tarafından yapılmış ve bildiri olarak yayınlanmıştır.

1950 yılına gelindiğinde ise M. Dresher ve M. Rand, Rand Corporation'da bugün *Prisoners Dilemma* yani *Mahkumların Açmazı* olarak bilinen oyunu ortaya çıkaran deneyi tamamlamışlardır.

Oyun teorisine tarihi katkılar yapan bir diğer isim de günümüzde herkesin bildiği John Nash'tir. J. Nash 1950 ve 1953 yılları arasında yayınladığı 4 makalesinde *İşbirliksiz Oyun Teorisi* ve *Pazarlık Teorisi*'ne yeni pencereler açan katkılarda bulunmuştur. 1950 yılında *N-kişili Oyunlarda Denge Noktaları*[10] ve *Pazarlık Problemi*[11], 1951 yılında *İşbirliksiz Oyunlar*da Denge Noktaları[12] ve 1953 yılında ise

[7] John von Neumann, On the Theory of Games of Strategy, Contributions to the Theory of Games, Ed. A. W. Tucker, R. D. Luce, Princeton, Princeton University Press, C.IV, 1959, s.13-42

[8] John von Numann, Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, Princeton University Press, 6. bs, 1955

[9] Lynn H. Loomis, On a Theorem of von Neumann, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, C.32, N.8, 15 Ağustos 1946, s.213-215

[10] John F. Nash, Equilibrium Points in N-Person Games, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, C.36, N.1, 15 Ocak 1950, s.48-49

[11] John F. Nash, Bargaining Problem, Econometrica, C.18, N.2, Nisan 1950, s.155-162

*İki Kişili İşbirlikçi Oyunlar*da Aksiyomatik Pazarlık Teorisi[13] makalelerini oyun teorisine kazandırmıştır. John Nash pazarlık çözümünün varlığını ispatlamış ve Nash programının ilk uygulamasını gerçekleştirmiştir.

1964 yılına gelindiğinde C. E. Lemke ve J. T. Howson[14], bir ikili matris oyunda Nash dengesini bulmak için bir denge noktasının varlığının ispatını sunmuş, bir algoritma tanımlamışlar ve bildiride ikili matrislerde denge sayısının da tek olduğunu göstermişlerdir. Günümüzde de çok fazla kullanılan, işbirlikçi olan ve işbirlikçi olmayan oyunlar arasındaki farkı gösteren tanımlama, 1966 yılında J. Harsanyi[15] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmanın hemen ardından J. Harsanyi, tam olarak bilgi sahibi olunmayan oyunların teorisini kurmuştur[16] ve bu konu gerek oyun teorisinin gerekse de ekonominin en önemli konularından biri halini almıştır.

1973 yılında J. Harsanyi, Karma Strateji Denge Noktaları için yeni bir gerekçe[17] isimli bildirisinde rastgeleleştirme stratejisinin geleneksel görüşünü ilk kez yıkmıştır; kendi cezasını tam olarak bilen her oyuncu, diğer oyuncuların ne yapacağı konusundaki tahmini doğrultusunda en iyi tek bir harekete sahiptir.

1989 yılına gelindiğinde ise Oyunlar ve Ekonomik Davranış isimli yayın organı kurulmuş ve yayın yapmaya başlamıştır.

1990 yılında David Kreps tarafından yayınlanan Mikro Ekonomik Teori Dersi kitabı[18], oyun teorisini standart mikro-ekonomi eğitimi müfredatına dahil eden ilk kitaptır. Bunun ardından ise R. J. Aumann ve S. Hart tarafından ikişer yıl arayla,

---

[12] John Nash, Non-Cooperative Games, The Annals of Mathematics, 2.seri, C.54, N.2, Eylül 1951, s.286-295

[13] John Nash, Two-Person Cooperative Games, Econometrica, C.21, N.1, Ocak 1953, s.128-140

[14] C. E. Lemke, J. T. Howson, Equilibrium Points of Bimatrix Games, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, C.12, N.2, Haziran 1964, s.413-423

[15] John C. Harsanyi, A General Theory of Rational Behavior in Game Situations, Econometrica, C.34, N.3, Temmuz 1966, s.613-634

[16] John C. Harsanyi, Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players Part I-II-III, Management Science, C.14, 1968, s.159-182; N.5 s.320-334; N.7 s.486-502

[17] John C. Harsanyi, Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed-Strategy Equilibriuum Points, International Journal of Game Theory, C.2, N.1, 1973, s.1-23

[18] David M. Kreps, A Course in MicroEconomic Theory, Princeton, Princeton University Press, 1990

Ekonomik Uygulamalar ile Oyun Teorisi El Kitabı 1. ve 2. cildi[19] yayınlamıştır. Oyun Teorisi ve Hukuk[20] isimli kitap, 1994 yılında D. G. Baird, R. H. Gertner ve R. C. Picker tarafından yayınlanmıştır. Bu kitap, hukuk ve ekonomi alanında oyun teorisi yaklaşımı sunan ilk yapıtlardan birisidir.

1994 yılında işbirlikçi olmayan oyun modellerindeki denge analizi konularındaki öncü yaklaşımlarından dolayı J. Nash, J. C. Harsanyi ve R. Selten'e Ekonomi Bilimleri Nobel ödülü verilmiştir. 2005 yılında, Ekonomi Bilimlerinde Nobel Ödülü'nü ise oyun teorisi analizi ile çatışma ve işbirliği anlayışını geliştirmelerinden dolayı R. J. Aumann ve T. C. Schelling almıştır.

Burada aktardığımız, oyun teorisi tarihinin sadece küçük bir kısmının özeti olmakla birlikte, günümüze kadar oyun teorisi üzerine birçok makale, bildiri ve çalışma mevcuttur. Bu çalışmalar, son yıllarda diğer alanlara da yayılarak ve artarak devam etmektedir. Oyun teorisinin bu kısa tarih özetinden de anlayacağımız gibi Oyun Teorisi; klasik oyun kavramından yola çıkarak başta ekonomi olmak üzere birçok alana uyarlanmış, tarafların davranışlarını modelleyen, çıkarları, strateji seçimleri üzerinde çalışan bir alandır.

[19] Ed. Robert Aumann, Sergiu Hart, Handbook of Game Theory with Economic Applications, C.I-II-III, Hollanda, Elsevier Science B.V., 1992-1994-2002
[20] Douglas G. Baird, Robert H. Gertner, Randal C. Picker, Game Theory and the Law, Cambridge, Harvard University Press, 1994

1.3. Ortaksız Oyunlar

Bu tip oyunlarda her oyuncunun amacı tek başına olabildiğince en yüksek kazancı elde edebilmektir [21]. Oyunlardaki genel kavramlardan daha önce bir miktar bahsetmiştik. Bu kavramları, bu kısım içerisinde kullanacağımız tanım ve ifadeleriyle ele alacak olursak:

Oyuncu: İçinde bulunduğu oyunun ne olduğuna dair gerekli ve yeterli bilgiye sahip, mantık çerçevesinde hareket edebilen ve amacı oyun sonunda fayda elde etmek, kazanmak olan birey ya da gruplardır. N – kişili bir oyunun oyuncu kümesi

$$I\ ; \quad i = 1, 2, \dots \dots, n \tag{1.1}$$

şeklinde gösterilecektir.

Strateji: Oyuncuların, oyunda en iyi sonucu elde etmek için yaptıkları davranış, seçenektir.

$\forall\ i$ oyuncusu için stratejiler kümesi S_i olmak üzere mevcut S_i kümeleri tüm oyuncular tarafından bilinen bir kümedir. Burada geçen S_i kümesine aynı zamanda i. oyuncunun durumlar uzayı da denmektedir. S_i kümesi sonlu veya sonsuz olabilmektedir. Ancak literatürde de genellikle sonsuz olmadığı varsayıldığından dolayı bu çalışmada da sonlu olarak alınacaktır. Her bir oyuncu kendi $s_i \in S_i$ stratejiler kümesinden bir strateji oynaması halinde aşağıdaki eşitlikte verilen durum ortaya çıkacaktır.

$$(s_1, s_2, \dots \dots, s_n) \ \in S = S_1 \times S_2 \times S_3 \times \dots \dots \times S_n \tag{1.2}$$

[21] Mehmet Ahlatçıoğlu, Fatma Tiryaki, Oyunlar Teorisi, İstanbul, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, 1998, s.1

Burada bulunan $S = S_1 \times S_2 \times S_3 \times \dots \dots \times S_n$ veya $\cup S_i$ kümesine tüm oyunun Durumlar Uzayı denir [22].

Oyunda yer alan oyuncuların strateji alternatifleri bulunması gerekmektedir. Eğer oyuncuların alternatif stratejileri yoksa yani diğer bir ifadeyle bir oyuncu tek bir stratejiye sahipse hem diğer oyuncular tarafından hamlesinin bilinmesinden dolayı hem de klasik oyun kuralları gereği oyun içerisinde yer alamaz. Bir oyun içerisinde her oyuncu sadece kendi hamleleriyle ilgilenerek onları oynamamalı aynı zamanda rakip oyuncuların hamlelerini takip ederek ve onları da dikkate alarak oynamalıdır; aynı satranç oyununda olduğu gibi mümkünse ileri hamleleri dahi değerlendirmelidir. Stratejik bir oyun problemini standart bir karar verme probleminden ayıran nokta da burasıdır [23].

Normal form bir oyunda oyuncular stratejilerini eş zamanlı olarak oynarlar, fakat bu ifade, oyuncular kesinlikle aynı anda hareket etmelidirler demek değildir: Oyunun tarafları birbirlerinin kararlarından habersiz bir şekilde hareket etmesini ifade etmektedir[24]. Yani herhangi bir oyun sırasında, oyuncular birbirlerinin hangi stratejiyi ve ne zaman oynayacaklarını bilememekte ve bu durumdan dolayı da oyun eş zamanlı olarak ilerlemektedir diyebiliriz. O halde oyun teorisinde bahsedilen ve tanımlanan oyunu, günlük hayatta da yer alan ve ilk akla gelen anlamı olan oyundan ayıran bir nokta da burasıdır.

Ödeme Fonksiyonu: $S_1 \times S_2 \times S_3 \dots \dots \times S_n$ stratejiler kümesinden elde edilmiş her bir durum sonucunda *i*. oyuncuya yapılacak ödemeleri gösteren $H_i : S \rightarrow R$ fonksiyonudur.

Kurulacak olan bir ortaksız oyun; bu noktaya kadar tanımlanan ifadeleri ele alarak; aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

---

[22] Michael Finus, Game Theory and International Environmental Cooperation, UK, Edward Elgar Publishing Inc., 2001, s.9

[23] Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein, A Course in Game Theory, Londra, İngiltere, Massachusetts Institute of Technology Press, 1998, s.11

[24] Robert Gibbons, A Primer in Game Theory, Malezya, Princeton University Press, 1992, s.4

$\Gamma =< I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} >$ [25] (1.3)

Denge durumu: Oyunda yer alan tüm taraflar, oyuncular açısından kabul gören yani her oyuncu için elde edilebilecek en iyi kazancı veren stratejiler bakımından kabul edilebilir olan $s = (s_1, s_2, \dots \dots, s_n) \in S = S_1 \times S_2 \times S_3 \dots \dots \times S_n$ durumdur.

Denge Stratejisi: Oyuncuların denge durumunu elde edilmek için yaptıkları strateji(ler)dir.

1.3.1. İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar

İki kişili ve sıfır toplamlı oyunlarda, oyunculardan birinin stratejisine bağlı olarak elde ettiği kazanç, diğerinin kaybına eşittir. Bu durumdan dolayı, bu tip oyunlarda ikinci oyuncunun ödeme fonksiyonu, birinci oyuncunun ödeme fonksiyonunun ters işaretlisi olarak da ifade edilebilmektedir. Yani her durumda da oyuncuların ödeme fonksiyonları mutlak değerce birbirinin aynısıdır. Aralarındaki tek fark, birinin kaybı diğerinin kazancıdır.

İki kişili sıfır toplamlı bir oyunda iki oyuncu olmasından dolayı oyun normal formda

$$\Gamma = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{H}) \quad (1.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada;

i) A, birinci oyuncunun stratejiler kümesini
ii) B, ikinci oyuncunun stratejiler kümesini
iii) H ise A x B üzerinde birinci oyuncu için fayda fonksiyonunu temsil etmektedir.

[25] Ahlatçıoğlu, Tiryaki, a.g.e., s.2

Burada H fonksiyonu;

$$H : (a, b) \in AxB \rightarrow H(a, b) \in R \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Birinci oyuncu $a \in A$ ve ikinci oyuncu $b \in B$ ‘yi, diğer oyuncunun hangi stratejiyi tercih ettiğinden habersiz şekilde seçer. Oyuncular bu seçimlerinden sonra birinci oyuncu ikinci oyuncudan $H(a, b) \in R$ olarak gösterilen bir miktarı kazanır. Burada $H(a, b) \in R$ ifadesiyle gösterilen değerin parasal birim (türk lirası, dolar, euro, vb) olarak negatif bir değer çıkması halinde birinci oyuncu bu miktarın mutlak değerini yani gerçek değerini ikinci oyuncuya öder. Öyleyse $H(a, b) \in R$ değeri birinci oyuncunun kazançlarını temsil ederken, ikinci oyuncunun kayıplarını temsil etmektedir diyebiliriz.

Bu şekilde yapılmış basit bir oyun tanımı aslında sonlu kombinasyonları olan karmaşık oyunları kapsayabilecek kadar da geniş bir yapıya da sahiptir.

1.3.1.1. Matris Oyunları ve Baskınlık

Her bir oyuncunun stratejiler kümesinin sonlu olduğunu varsaydığımızı daha önce belirtmiştik. İki kişili sıfır toplamlı oyunlar, ödeme fonksiyonundan dolayı matris oyunları olarak da ifade edilmektedir. Kazanç matrisimiz A matrisi olmak üzere, kazanç matrisini oluştururken kullanacağımız ifadeler:

A_i: Birinci oyuncunun stratejileri $i = 1, 2, 3, \dots\dots, m$

B_j: İkinci oyuncunun stratejileri $j = 1, 2, 3, \dots\dots, n$

a_{ij}: Birinci oyuncunun A_i, ikinci oyuncunun da B_j stratejisini oynaması halinde birinci oyuncunun elde edeceği kazanç miktarı şeklinde olmak üzere oyunun kazanç matrisi:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde ifade edilir ve bu şekilde ifade edilmiş bir oyun literatürde $m \times n - lik\ oyun$ olarak da geçmektedir.

Bir oyunun kazanç matrisinde j. sütun için $i \neq k$ olmak üzere $a_{ij} \geq a_{kj}$ olması durumunda birinci oyuncunun A_i stratejisinin A_k stratejisine baskın olduğu söylenir ve A_i stratejisine ise Baskın Strateji denir.

Diğer oyuncunun ne oynadığından bağımsız olarak, optimal olan stratejiye baskın strateji, olasılıksal bir seçenek olmadan oyunu çözen stratejiye pür strateji ve oyunu çözmek için olasılık kullanan stratejiye de karma strateji denir [26].

Örnek 1.1: Bir ilde bulunan A ve B isimli iki ecza firması, müşterisi olan hastane sayılarını arttırmak için hastanelere bir takım promosyonlar düzenleyeceklerdir. Uygulayacakları promosyonlar karşısında elde edecekleri kazanç miktarlarının (milyon TL) A firmasının kazançları cinsinden düzenlenmiş oyun matrisi aşağıdaki gibidir. Firmaların oyun sonunda uygulayabilecekleri baskın stratejinin bulunması aşağıdaki gibidir.

[26] Anas N. Al-Rabadi, "Reversible Error Correction in Decisions Communication within Quantum Game-Theoretic Bijectivity", Game Theory: Strategies, Equilibria, and Theorems, Ed. Ingrid N. Haugen, Anna S. Nilsen, New York, Nova Science Publishers inc., 2009, s.44

$$
A = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 10 & -6 & -8 & 12 & -7 \\ 11 & -10 & 4 & 3 & -8 \\ 12 & -4 & -1 & 15 & -3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A firmasının kazançları dikkate alındığında A firması a_3 stratejisini oynaması halinde elde edeceği kazançlar a_1 stratejisini oynaması halinde elde edeceği kazançlardan fazladır. O halde baskın strateji tanımından da dolayı a_3 stratejisi a_1 stratejisine baskındır denir ve a_1 stratejisi basılan strateji olduğu için elenir. A firmasının baskın stratejisi kalmadığından dolayı B firmasının baskın stratejilerini inceleriz.

Matrisi B firmasının kayıpları açısından değerlendirirsek, mevcut durumda b_2 stratejisi diğer tüm stratejileri (b_1, b_3, b_4, b_5) basmaktadır. O halde basılan stratejiler olmalarından dolayı B firması mevcut durumda b_1, b_3, b_4 ve b_5 sütunlarını eler.

Kalan $\begin{array}{c} a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}$ matrisinde A firması ise daha az kayıp vereceğinden dolayı a_3 stratejisini seçer. a_3 stratejisi baskın strateji ve a_2 stratejisi basılan strateji olduğundan dolayı a_2 elenir.

1.3.1.2. Eyer Noktası

$(a, b) \in A \times B$ stratejileri herhangi bir X oyunu için denge durumunu ifade etsin. Birinci oyuncunun denge durumundaki a stratejisi yerine oynayacağı $\forall\, a' \in A$ stratejisini oynaması halinde kazancı

$$H_1(a, b) \geq H_1(a', b) \tag{1.6}$$

şeklinde olacak ve denge durumundan daha küçük bir değer elde edecektir. Aynı şekilde ikinci oyuncunun da denge durumundaki b stratejisi yerine oynayacağı $\forall\, b' \in B$ stratejisini oynaması halinde elde edeceği kazanç

$$H_2(a,b) \geq H_2(a,b') \quad (1.7)$$

şeklinde olacak ve yine aynı şekilde denge durumundaki kazancından daha küçük bir değer elde edecek ya da diğer bir ifadeyle daha büyük bir değeri kaybedecektir. İkinci oyuncunun kazancının birinci oyuncunun kazancının negatif işaretlisi olduğunu biliyoruz. O halde;

$$H_2(a,b) = -H_1(a,b) \quad (1.8)$$

olacaktır. (1.8) eşitsizliğinden faydalanarak (1.7) eşitsizliğini yeniden düzenleyecek olursak:

$$-H_1(a,b) \geq -H_1(a,b') \quad (1.9)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve bu eşitsizliğin negatif işaretli halini alacak olursak

$$H_1(a,b) \leq H_1(a,b') \quad (1.10)$$

eşitsizliğine ulaşırız. (1.6) ve (1.10) eşitsizliklerini birleştirecek olursak;

$$H_1(a',b) \leq H_1(a,b) \leq H_1(a,b') \quad (1.11)$$

eşitsizliğini sağlarız[27]. Bu eşitsizlikten de anlıyoruz ki; birinci oyuncunun denge stratejisini değiştirmesi durumunda kazancı, denge durumundaki kazancına göre azalmaktadır. Yine aynı eşitsizliğe göre, ikinci oyuncunu stratejisini değiştirmesi halini ele alacak olursak; birinci oyuncunun kazancı artmakta ve dolayısıyla ikinci oyuncu için kazanç azalmakta veya kayıp artmaktadır. Bu da bize gösteriyor ki, hiçbir oyuncu (a, b) stratejilerini değiştirmez ve bu durumu bozmak istemez. Buradaki (a, b) stratejisine – her iki oyuncu için de – en iyi strateji denmektedir [28].

[27] Ahlatçıoğlu, Tiryaki, a.g.e., s.14
[28] Eric Rasmusen, An Introduction to Game Theory, Massachusetts, Blackwell Publisher, 2005, s.18

Buradan anlıyoruz ki H fonksiyonunun (a, b) noktasındaki değeri a'yı değiştirmekle azalmakta, b'yi değiştirmekle artmaktadır. Yani (a, b) noktası birinci oyuncunun kazanç fonksiyonu için maksimum, ikinci oyuncunun kayıp fonksiyonu için de minimum nokta olmasından dolayı bir eyer noktasıdır. Bu da demektir ki (a, b) noktası H fonksiyonu için bir eyer noktasıdır.

1.3.1.3. Minimax Eşitliği ve Eyer Noktası

A matrisi, sıfır toplamlı iki kişili bir oyun için ödemeler matrisi olmak üzere $(A_i^*,\ B_j^*)$ oyunun denge durumu olsun. Burada A_i^* ve B_j^* sırasıyla birinci ve ikinci oyuncunun denge durumunu elde edebilmek için oynadıkları stratejilerdir. Oyunumuz iki kişili sıfır toplamlı bir oyun olduğundan dolayı $(A_i^*,\ B_j^*)$ denge durumu aynı zamanda oyunun eyer noktasıdır.

$$
A = \begin{array}{c|ccccccc|l}
 & B_1 & B_2 & \cdots & & B_j & \cdots & B_n & \\
\hline
A_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & \rightarrow \min_j a_{1j} \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & \rightarrow \min_j a_{2j} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & \quad \vdots \\
A_i & a_{i1} & a_{i2} & & & a_{ij} & & a_{in} & \rightarrow \min_j a_{ij} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \quad \vdots \\
A_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & \rightarrow \min_j a_{mj} \\
\hline
\end{array}
\Bigg\}\ \max_i \min_j a_{ij}
$$

$$
\underbrace{\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\max_i a_{i1} & \max_i a_{i2} & \cdots & \max_i a_{ij} & \cdots & \max_i a_{in}
\end{array}}_{\min_j \max_i a_{ij}}
$$

Yukarıdaki şemada matrisin sağ kısmında yer alan her satırdan elde edilen $\min_{j} a_{ij}$ değerleri o satırlar yani mevcut satırlarda yer alan birinci oyuncunun stratejileri için minimum kazançları vermektedir. $\max_{i} \min_{j} a_{ij}$ değeri ise elde edilen bu minimum kazançların maksimumunu göstermektedir. Bu da bize birinci oyuncunun garantilediği minimum kazancı vermektedir. Matrisin alt kısmında yer alan $\max_{i} a_{ij}$ değerleri ise ikinci oyuncunun her stratejisi için minimum kayıplarını vermektedir. Bu durumun nedeni, ödemeler matrisimizin birinci oyuncunun kazançlarına göre düzenlenmiş olmasıdır. Bu mevcut $\max_{i} a_{ij}$ değerlerinden elde edilen $\min_{j} \max_{i} a_{ij}$ değeri de ikinci oyuncunun her stratejisi için minimum kayıplarının maksimumunu yani ikinci oyuncunun garantilediği maksimum kaybı bize vermektedir. Daha önce de bahsetmiş olduğumuz oyunun denge durumu ise bu iki değerin yani oyuncuların garantilediği maksimum kazanç ve kayıpların eşit olması halinde mümkündür.

Burada her satırın minimumunu ve her sütunun maksimumunu almamızın sebebi ise şu şekildedir: Birinci oyuncunun A_i stratejisini seçmesi halinde ödemeler matrisi ikinci oyuncunun kayıplarına göre olduğundan dolayı ikinci oyuncu bu mevcut i. satırdaki minimum değeri seçecektir. Her satırın minimumunu aldığımız takdirde de birinci oyuncunun her hamlesi için elde edebileceği kazançları görmüş oluruz. Yani birinci oyuncu A_i stratejisini oynaması halinde $\min_{j} a_{ij}$ miktarında bir ödemeyi garantilemektedir. Bu değerlerin maksimumu olan ve en yüksek miktarda ödemeyi veren strateji, birinci oyuncuya $\max_{i} \min_{j} a_{ij}$ miktarında ödemeyi getirecektir. Birinci oyuncunun beklediği ve oyun sonunda elde edeceği kazanç da bu değerden küçük olamaz.

Aynı durumu ikinci oyuncu için inceleyelim ve ikinci oyuncu B_j stratejisini seçmiş olsun. Ödemeler matrisi birinci oyuncunun kazançlarına göre olduğundan dolayı birinci oyuncu daha fazla kazanç elde etmek için j. sütundaki değerler içinden maksimum olan değeri seçecektir. Bu değer de bize, ikinci oyuncunun her hamlesi için kaybedeceği miktarı verir. Doğal olarak ikinci oyuncu bu kayıplar içinden en az olan kaybı seçecektir ve bu değer de $\min_j \max_i a_{ij}$ 'dir. Bu da bize ikinci oyuncunun kayıplarının $\min_j \max_i a_{ij}$ değerinden daha büyük olamayacağını göstermektedir.

Teorem : İki kişili ve sıfır toplamlı bir matris oyununun bir eyer noktasına sahip olması için gerek ve yeter koşul oyunda aşağıdaki eşitliğin sağlanmasıdır.

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = v^{*} \quad (1.12)$$ [29]

Minimax teoremi ve eyer noktası arasındaki bağlantı konveksliğin (dışbükey) bir özelliğinin sonucudur [30].

Örnek 1.2: Aynı mahallede bulunan iki farklı kolej yeni başlayacak olan dönem için kayıt kampanyaları düzenleyeceklerdir. Her kolejin uygulayacağı farklı kampanyalar karşısında kazanacakları ve kaybedecekleri öğrenci sayıları A kolejinin kazançları cinsinden aşağıdaki oyun matrisinde verilmektedir. Minimax eşitliğini kullanılarak oyunun eyer noktasının bulunması aşağıda yer almaktadır.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 500 & -300 & 100 \\ -400 & -500 & -600 \\ -200 & 600 & -450 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ödemeler matrisinden elde edilen maksimum, minimum, maximin ve minimax değerleri aşağıdaki gibidir.

[29] John von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen, C.100, N.1, 1928, 302-303.
[30] Christian Schmidt, Game Theory and Economic Analysis: A Quiet Revolution in Economics, Ed. Christian Schmidt, London, Routledge Taylor & Francis Group, 2002, s.2

$$
\begin{array}{lc}
 & \min\limits_{j} \\
A = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 500 & -300 & 100 \\ -400 & -500 & -600 \\ -200 & 600 & -450 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \rightarrow \; 200 \\ \rightarrow \; -300 \\ \rightarrow \; -600 \\ \rightarrow \; -450 \end{array} \\
\qquad \;\; \downarrow \qquad \;\; \downarrow \qquad \;\; \downarrow & \\
\max\limits_{i} \qquad 500 \quad 600 \quad 200 &
\end{array}
$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

$$\max_i(200, -300, -600, -450) = \min_j(500,600,200) = 200$$

O halde oyunun denge durumu ve eyer noktası (a_1, b_3) stratejileridir.

1.3.1.4. Karma Stratejiler

Bir önceki kısımda minimax eşitliğinden ve eyer noktasından bahsetmiştik. Fakat iki kişili sıfır toplamlı oyunların hepsi bir eyer noktasına sahip olmak zorunda değildir. Doğal olarak da bu tür eyer noktasına sahip olmayan oyunlarda oyuncular için en iyi strateji ya da denge durumundan bahsetmek mümkün değildir. Eyer noktasından bahsetmek mümkün olmasa da olasılık teorisinden de bileceğimiz gibi her stratejinin bir oynanma olasılığı vardır. Eyer noktasına sahip olan oyunlarda her oyuncu için oyunu eyer noktasına götüren stratejinin oynanma olasılığı 1, diğer stratejilerin oynanma olasılığı da doğal olarak 0’dır. Birinci oyuncunun stratejiler kümesi $\{A_1, A_2, \dots \dots, A_m\}$ olmak üzere, her bir stratejinin oynanma olasılıkları kümesi sırasıyla

$$\{p_1, p_2, \dots \dots, p_m\} \tag{1.13}$$

şeklinde olacaktır. Burada p_i , A_i stratejisinin birinci oyuncu tarafından oynanma olasılığını göstermektedir. O halde aşağıdaki eşitlik aşikardır:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = p_1 + p_2 + \dots \dots \dots \dots + p_m = 1 \qquad (1.14)$$

Birinci oyuncunun A_i stratejisini ve ikinci oyuncunun B_j stratejisini oynaması halinde birinci oyuncunun elde edeceği kazanç a_{ij} olsun. İkinci oyuncunun B_j stratejisini oynaması ve birinci oyuncunun karma stratejisinin $(p_1, p_2, \dots \dots, p_m)$ olması halinde birinci oyuncunun beklenen kazancı

$$p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots \dots \dots + p_m a_{mj} \qquad (1.15)$$

şeklinde elde edilecek değer olacaktır.

Birinci oyuncunun karma stratejileri $(p_1, p_2, \dots \dots, p_m)$ ve ikinci oyuncunun karma stratejileri de $(q_1, q_2, \dots \dots, q_n)$ olmak üzere oyun sonucunda birinci oyuncunun beklenen kazancı

$$\begin{aligned} v = a_{(p_1, p_2, \dots\dots, p_m)(q_1, q_2, \dots\dots, q_n)} &= p_1 q_1 a_{11} + p_2 q_2 a_{12} + \dots \dots \dots + p_1 q_n a_{1n} \\ &+ p_2 q_1 a_{21} + p_2 q_2 a_{22} + \dots \dots \dots + p_2 q_n a_{2n} \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \qquad (1.16) \\ &+ p_m q_1 a_{m1} + p_m q_2 a_{m2} + \dots \dots \dots + p_m q_n a_{mn} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} \end{aligned}$$

eşitliğinden elde edilecek sonuçla eşdeğer olacaktır [31]. Bu değer de minimax eşitliklerindeki gibi elde edeceğimiz değerler arasında olacaktır.

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq v \leq \min_j \max_i a_{ij} \tag{1.17}$$

Yani oyun değeri olarak da adlandırılan bu v değeri eşitsizlik (1.17) ‘daki sınırlardan büyük ya da küçük olamaz.

1.3.1.5. Karma Stratejiler ve Lineer Programlama

Bir önceki konuda oyunda pür stratejilerin olmaması halinde oyun değerinin hesaplanmasının ne şekilde yapıldığını incelemiştik. Bu kısımda da bizi bu oyun değerini bulmaya götürecek olan karma stratejiler kümesinin olasılıksal değerlerini, simpleks yöntemle ne şekilde hesaplanabileceğini inceleyeceğiz.

İki kişinin yer aldığı bir oyunda, birinci oyuncunun stratejiler kümesi $S_A = \{A_1, A_2, \dots\dots, A_m\}$ ve ikinci oyuncunun stratejiler kümesi $S_B = \{B_1, B_2, \dots\dots, B_m\}$ olmak üzere $m \times n - lik$ oyun matrisi aşağıda gösterildiği gibi olsun:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & {}_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[31] Andres Schalk, The Theory of Games and Game Models, Manchester Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Departmanı, Eylül 2003, s.43

Pür stratejilerin olmadığı bu tip bir oyun matrisinde birinci oyuncunun sırasıyla stratejilerini oynama olasılıkları $P_A = \{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m\}$ olsun. İkinci oyuncunun oynayacağı her bir stratejiye karşılık birinci oyuncunun kazanç miktarları aşağıdaki eşitsizliklerde yer aldığı gibi oluşacaktır:

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \dots\dots\dots + p_m a_{m1} \geq v$$

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \dots\dots\dots + p_m a_{m2} \geq v$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad (1.18)$$

$$p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \dots\dots\dots + p_m a_{mn} \geq v$$

$$p_1 + p_2 + \dots\dots\dots + p_m = 1$$

Amaç: $Max\ v$

Burada v değerini maksimize etmek $\left(\frac{1}{v}\right)$ değerini minimize etmekle aynı anlama gelmektedir [32]. O yüzden tüm eşitsizlikleri tüm eşitsizlikleri $\left(\frac{1}{v}\right)$ ile çarparsak aşağıdaki modeli elde ederiz:

$$\left(\frac{p_1}{v}\right) a_{11} + \left(\frac{p_2}{v}\right) a_{21} + \dots\dots\dots + \left(\frac{p_m}{v}\right) a_{m1} \geq 1$$

$$\left(\frac{p_1}{v}\right) a_{12} + \left(\frac{p_2}{v}\right) a_{22} + \dots\dots\dots + \left(\frac{p_m}{v}\right) a_{m2} \geq 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad (1.19)$$

[32] Paul R. Thie, Gerard E. Keough, An Introduction to Linear Programming and Game Theory, 3.bs, USA, John Wiley & Sons Inc., 2008, s.362

$$\left(\frac{p_1}{v}\right) a_{1n} + \left(\frac{p_2}{v}\right) a_{2n} + \ \dots \dots \dots \ + \left(\frac{p_m}{v}\right) a_{mn} \geq 1$$

$$p_1 + p_2 + \ \dots \dots \dots \ + p_m = 1$$

Amaç: $Min \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{v}$

Kolaylık olması açısından $\left(\frac{p_i}{v}\right) = x_i$ olacak şekilde tüm eşitsizlikleri yeniden düzenlersek, simpleks yöntemle kolaylıkla çözülebilecek aşağıdaki gibi bir Lineer Programlama Modelini elde ederiz.

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ \dots \dots \dots \ + x_m a_{m1} \geq 1$$

$$x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ \dots \dots \dots \ + x_m a_{m2} \geq 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \tag{1.20}$$

$$x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ \dots \dots \dots \ + x_m a_{mn} \geq 1$$

$$x_i \geq 0 \, , i = 1,2, \dots \dots , m$$

Amaç: $Min \ \sum_{i=1}^{m} x_i$

Simpeks yöntemle elde ettiğimiz çözümlerden aşağıdaki eşitlikle v değerini buluruz:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} \tag{1.21}$$

v değerini bulduktan sonra da $p_i = v \cdot x_i$ işlemleri yardımıyla birinci oyuncunun karma stratejiler kümesinin elemanlarını elde edebiliriz.

Mevcut oyun formumuzda bu sefer ikinci oyuncunun stratejilerini oynama olasılıkları $P_B = \{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n\}$ olsun. Bu durumda birinci oyuncunun oynayacağı her bir stratejisine karşın ikinci oyuncunun elde edeceği kazançlar aşağıdaki eşitsizliklerde yer aldığı gibi olacaktır:

$$
\begin{aligned}
& q_1 a_{11} + q_2 a_{12} + \dots \dots \dots + q_n a_{1n} \leq v \\
& q_1 a_{21} + p_2 a_{22} + \dots \dots \dots + q_n a_{2n} \leq v \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& q_1 a_{m1} + q_2 a_{m2} + \dots \dots \dots + q_n a_{mn} \leq v \\
& q_1 + q_2 + \dots \dots \dots + q_n = 1
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Amaç: $Min\ v$

Birinci oyuncu için yaptığımız gibi aynı şekilde tüm eşitsizlikleri $\left(\frac{1}{v}\right)$ ile çarpar ve elde edeceğimiz yeni eşitsizliklerde $y_j = \frac{q_j}{v}$ dönüşümünü yapacak olursak elde edeceğimiz Lineer Programlama Modeli aşağıdaki gibi olacaktır:

$$
\begin{aligned}
& y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \dots \dots \dots + y_n a_{1n} \leq 1 \\
& y_1 a_{21} + y_2 a_{22} + \dots \dots \dots + y_n a_{2n} \leq 1 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& y_1 a_{m1} + y_2 a_{m2} + \dots \dots \dots + y_n a_{mn} \leq 1
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

$y_j \geq 0 \; , j = 1,2, \dots \dots , n$

Amaç: $Max \sum_{i=1}^{n} y_i$

Lineer Programlama Modelini çözdükten sonra elde edeceğimiz sonuçlarla bir önceki çözümde bahsettiğimiz şekilde oyun değeri ve ikinci oyuncunun karma stratejileri de bulunabilir.

Burada birinci oyuncu ve ikinci oyuncu için bulduğumuz *v* değerleri birbirinin aynısı çıkacaktır. O yüzden ikinci oyuncu için yapılacak hesaplamalarda birinci oyuncu için bulduğumuz *v* değerini kullanarak işlemler yapılabilir.

Örnek 1.3: Aşağıdaki oyun matrisinde iki büyük televizyon firmasının reklam verenlere karşı yapacakları tanıtımlar sonucunda kanal değiştirmeye karar veren işletmelerin bir gün içindeki toplam reklam süreleri saniye olarak A televizyonunun kazançları cinsinden verilmektedir. Televizyon firmalarının karma stratejilerini, oyun değerinin hangi aralıkta olabileceğini ve birinci oyuncunun beklenen kazancının bulunmasına dair çözüm aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & -600 & 850 & 500 \\ -300 & 400 & -200 & 600 \\ 800 & 1200 & -400 & 1000 \end{bmatrix}$$

Birinci oyuncunun karma stratejileri $P_A = \{p_1, p_2, p_3\}$ ve ikinci oyuncunun karma stratejileri $P_B = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ olsun. Birinci oyuncunun karma stratejileri için oluşturulacak lineer programlama modeli aşağıdaki gibi olacaktır.

$1000x_1 - 300x_2 + 800x_3 \geq 1$

$-600x_1 + 400x_2 + 1200x_3 \geq 1$

$850x_1 - 200x_2 - 400x_3 \geq 1$

$500x_1 + 600x_2 + 1000x_3 \geq 1$

$x_{1,2,3} \geq 0$

Amaç: $Min\ (x_1 + x_2 + x_3)$

Modeli çözümlediğimiz zaman $P_A = \{0,525; 0; 0,475\}$ ve birinci oyuncunun beklenen kazancını $v = 255,738$ olarak buluruz.

İkinci oyuncunun karma stratejileri için oluşturulabilecek lineer programlama modeli ise aşağıdaki gibi oluşacaktır.

$1000y_1 - 600y_2 + 850y_3 + 500y_4 \leq 1$

$-300y_1 + 400y_2 - 200y_3 + 600y_4 \leq 1$

$800y_1 + 1200y_2 - 400y_3 + 1000y_4 \leq 1$

$y_{1,2,3,4} \geq 0$

Amaç: $Max\ (y_1, y_2, y_3, y_4)$

Çıkardığımız bu modeli çözümlediğimiz zaman $P_B = \{0; 0,41; 0,59; 0\}$ ve birinci oyuncunun beklenen kazancını $v = 255,738$ olarak elde ederiz. Konu anlatımında da belirttiğimiz gibi her iki çözümde de elde ettiğimiz *v* değerleri birbirine eşit çıkmıştır.

Gerçek oyun değerinin aralığını minimax teoremiyle bulacak olursak;

$\max_i \min_j a_{ij} = -300 \quad ve \quad \min_j \max_i a_{ij} = 850$

Değerlerini elde ederiz ve gerçek oyun değerimiz $-300 \leq v^* \leq 850$ aralığında olması gerekir. Bulduğumuz beklenen değer de bu aralıkta yer almaktadır.

1.3.1.6. $2 \times 2 -$ lik Oyunlar

Bu kısımda birinci ve ikinci oyuncun da ikişer adet stratejilerinin olduğu oyunların çözümünü inceleyeceğiz. Birinci oyuncunun kazançlarına göre olan $2 \times 2 -$ lik ödeme matrisi aşağıdaki gibi olsun;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

(1.24) 'deki ödeme matrisini ve oyuncuların $((p_1, p_2), (q_1, q_2))$ karma stratejilerini göz önüne alırsak birinci ve ikinci oyuncuların karma stratejileri ikişer adet olduğundan dolayı aşağıdaki gibi yazılabilecektir:

$$A = \begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc} y & 1-y \\ B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array} \tag{1.25}$$

Yani; birinci ve ikinci oyuncuların karma stratejileri sırasıyla;

$$X = (x, 1 - x) \tag{1.26}$$

$$Y = (y, 1 - y) \tag{1.27}$$

şeklinde olacaktır. Burada birinci oyuncunun ilk stratejisini oynama olasılığı x, ikinci stratejisini oynama olasılığı da $1-x$ ve ikinci oyuncunun ilk stratejisini oynama olasılığı y, ikinci stratejisini oynama olasılığı da $1-y$ dir. Bunlardan dolayı da $x, y \in [0,1]$ olacaktır.

Daha önceki konularda bahsedildiği gibi oyunculardan birinin stratejileri arasında baskınlık mevcut ise baskın stratejinin oynanma olasılığı 1, diğer stratejinin yani baskın olmayan stratejinin oynanma olasılığı da 0 olacaktır. Bu durumda diğer oyuncu içinde baskın bir strateji oluşacak ve aynı durum geçerli olacaktır. Bunun sonucunda ise oyuncuların kazanç ve kayıpları

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{ij}^* \tag{1.28}$$

eşitliğinde görüldüğü gibi oluşacak ve oyunda bir denge durumu ve eyer noktası mevcut olacaktır.

Bir başka ihtimal de oyuncuların stratejileri arasında denklik olması halidir. Yani oyuncunun alternatiflerinden elde edeceği kazançlar arasında fark yoktur. Stratejileri arasında denklik olan oyuncu bu mevcut denklikten dolayı istediği herhangi bir stratejiyi keyfi olarak seçebilir.

Konunun giriş kısmında başlangıcını yaptığımız ve bu kısımda ayrıntılı olarak inceleyeceğimiz asıl çözüm ise diğer iki durumun aksine oyuncuların denk veya baskın stratejilerinin olmaması ve dolayısıyla oyunda bir denge durumunun ve eyer noktasının oluşmaması halidir.

Öncelikle Birinci oyuncunun optimal stratejilerini inceleyelim. İkinci oyuncunun B_1 stratejisini seçmesi halinde birinci oyuncunun kazancı

$$x\, a_{11} + (1-x)\, a_{21} \ \geq v \tag{1.29}$$

şeklinde olacaktır. İkinci oyuncunun B_2 stratejisini seçmesi halinde birinci oyuncunun kazancı ise

$$x\, a_{12} + (1-x)\, a_{22} \ \geq v \tag{1.30}$$

şeklinde olacaktır. Burada amaç v'yi maksimum yapmaktır. (1.29) ve (1.30) eşitsizliklerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz;

$$\left.\begin{aligned} x\, a_{11} + (1-x)\, a_{21} = v^* \\ x\, a_{12} + (1-x)\, a_{22} = v^* \end{aligned}\right\}$$

$$x\,(a_{11} - a_{12}) + (1-x)\,(a_{21} - a_{22}) = 0 \tag{1.31}$$

$$x\,(a_{11} - a_{12}) + a_{21} - a_{22} + x\,(-a_{21} + a_{22}) = 0$$

$$x\,(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{21} - a_{22} = 0$$

$$x\,(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) = a_{22} - a_{21}$$

$$p_1 = x = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \tag{1.32}$$

Bu eşitlik de bize birinci oyuncunun birinci hamlesinin oynanma olasılığını verir. Birinci oyuncunun ikinci hamlesinin oynanma olasılığını da inceleyecek olursak;

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - x = 1 - \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \tag{1.33}$$

eşitliğini elde ederiz. Birinci oyuncunun karma stratejileri (p_1, p_2) olmak üzere; birinci oyuncunun karma stratejileri[33]:

[33] Thie, Keough, a.e., s.372

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}\right) \qquad (1.34)$$

O halde bulduğumuz p_1 ve p_2 değerlerini kullanarak optimal oyun değeri olan v^* değerini hesaplayalım;

$$v^* = p_1\, a_{11} + p_2\, a_{21}$$

$$= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}\, a_{11} + \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}\, a_{21}$$

$$= \frac{a_{11}a_{22} - a_{11}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} + \frac{a_{21}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$= \frac{a_{11}a_{22} - \boldsymbol{a_{11}a_{21}} + \boldsymbol{a_{21}a_{11}} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$= \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Optimal oyun değeri aşağıdaki gibidir [34]:

$$v^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \qquad (1.35)$$

Şimdi de ikinci oyuncunun optimal stratejilerini inceleyelim. Birinci oyuncunun A_1 stratejisini oynaması halinde ikinci oyuncunun kazancı;

$$y\, a_{11} + (1 - y)\, a_{12} \le v \qquad (1.36)$$

şeklinde olacaktır. Birinci oyuncunun A_2 stratejisini oynaması halinde ikinci oyuncunun kazancı;

[34] Thie, Keough, a.e., s.372

$$y\, a_{21} + (1-y)\, a_{22} \ \leq v \tag{1.37}$$

şeklinde olacaktır. Buradaki amaç ise amaç v'yi minimum yapmaktır. (1.36) ve (1.37) eşitsizliklerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz;

$$\left.\begin{aligned} y\, a_{11} + (1-y)\, a_{12} = v^* \\ y\, a_{21} + (1-y)\, a_{22} = v^* \end{aligned}\right\}$$

$$y\,(a_{11} - a_{21}) + (1-y)\,(a_{12} - a_{22}) = 0 \tag{1.38}$$

$$y\,(a_{11} - a_{21}) + a_{12} - a_{22} + y\,(-a_{12} + a_{22}) = 0$$

$$y\,(a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}) + a_{12} - a_{22} = 0$$

$$y\,(a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}) = a_{22} - a_{12}$$

$$q_1 = y = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \tag{1.39}$$

Bu eşitlik de bize ikinci oyuncunun birinci hamlesinin oynanma olasılığını verir. İkinci oyuncunun ikinci hamlesinin oynanma olasılığını da inceleyecek olursak;

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - y = 1 - \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \tag{1.40}$$

O halde ikinci oyuncunun karma stratejileri (q_1, q_2) şeklinde olmak üzere; ikinci oyuncunun karma stratejileri [35]:

[35] Thie, Keough, a.e., s.372

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}\right) \tag{1.41}$$

Diğer bir taraftan; v^* değerini daha önceden bulduğumuzdan dolayı v^* değerini kullanarak da ikinci oyuncunun karma stratejileri olan (q_1, q_2) değerlerini bulabiliriz.

$$y\, a_{11} + (1 - y)\, a_{12} = v^*$$

eşitliğinden y değerini elde edebiliriz.

$$y\,(a_{11} - a_{12}) + a_{12} = v^*$$

$$y = \frac{v^* - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} \tag{1.42}$$

şeklinde bulduğumuz y değerini 1 ‘den çıkararak q_2 değerini de hesaplarsak;

$$q_2 = 1 - y = 1 - \frac{v^* - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - v^*}{a_{11} - a_{12}} \tag{1.43}$$

İkinci oyuncunun v^* yardımıyla hesaplanan (q_1, q_2) karma stratejileri

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{v^* - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \frac{a_{11} - v^*}{a_{11} - a_{12}}\right) \tag{1.44}$$

şeklinde olacaktır. Ayrıca bu kısımda incelediğimiz oyunların ödemeler matrisinde, oyuncuların stratejileri arasında denklik olmadığından dolayı işlemlerin hiç birinde payda sıfıra eşit çıkmayacaktır.

Burada karışık strateji seçimlerinin sonuçları, beklenen faydalar olarak anlaşılabilir; yani strateji seçeneklerinin ortak olasılıklarına uygun ağırlıklandırılmış tüm olası sonuçlar üzerinden ortalamalarıdır [36].

Burada 2×2 −lik oyunların çözümü için yolları inceledik. Oyunlarda öncelikle baskın stratejileri kullanarak ya da minimax yöntemiyle, bir denge durumu oluşup oluşmadığına bakarız. Bir denge durumu mevcutsa çözüm daha kolay olacaktır. Eğer oyunda denge durumu ilk iki yolla bulunamazsa bu kısımda ayrıntılı olarak bahsettiğimiz şekilde oyuncuların karma stratejileri (1.32), (1.33), (1.42) ve (1.43) formülleri yardımıyla hesaplanır ve oyunun optimal değeri ise (1.35) formülü yardımıyla bulunabilir.

Örnek 1.4: Alfa tekstil, yurt dışında sektörde öncü bir firmayla yapmayı düşündüğü iş anlaşması teklifini götürmek üzere bünyesinde bulunan müdürlerden bir temsilci seçecektir. İki ana departmandan oluşan tekstilde her departmanda da iki adet müdür bulunmaktadır. Müdür seçimi için her departman bir adet müdür belirledikten sonra son aşamadaki seçimi şirket yönetimi yapacaktır ve giden temsilcinin anlaşmayı yapması durumunda bağlı bulunduğu departmandaki tüm personele ikramiye verilecektir. Departmanlarda yer alan müdürler ve bu müdürlerin şirket yönetimi nazarında birbirlerine göre avantajları puan olarak birinci departmanın avantajları cinsinden aşağıda verilmiştir. Departmanlar için uygun olan müdür seçimine dair karma strateji değerlerinin ve oyun değerinin belirlenmesi aşağıda yer almaktadır.

$$\begin{array}{ccc} & & D_2 \\ & & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ D_1 & \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

[36] Anatol Rapoport, N-Person Game Theory Concepts and Applications, USA, The University of Michigan Press, 1970, s.312

Kısım müdürlerinin birbirlerine göre baskınlıkları bulunmadığından dolayı departmanların karma stratejilerini bulmamız gerekmektedir. 1. departmanın karma stratejilerine $(p_1\,, p_2)$, 2. departmanın karma stratejilerine de $(q_1\,, q_2)$ diyelim.

$$(p_1\,, p_2) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}\right)$$

$$= \left(\frac{5+3}{4+2+3+5}, \frac{4+2}{4+2+3+5}\right) = \left(\frac{8}{14}\,, \frac{6}{14}\right) = \left(\frac{4}{7}\,, \frac{3}{7}\right)$$

$$(q_1\,, q_2) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}\right)$$

$$= \left(\frac{5+2}{4+2+3+5}, \frac{4+3}{4+2+3+5}\right) = \left(\frac{7}{14}\,, \frac{7}{14}\right) = \left(\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\right)$$

$$v^* = \frac{a_{11}a_{22} - \ a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{4 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2)}{4+2+3+5} = \frac{14}{14} = 1$$

Şeklinde denklemler yardımıyla $(p_1\,, p_2)$, $(q_1\,, q_2)$ ve v^* değerleri kolaylıkla elde edilir.

1.3.1.7. $\boldsymbol{m \ \times 2 -}$ lik Oyunlar

Bu kısımda inceleyeceğimiz konu, birinci oyuncunun m tane ikinci oyuncunun ise iki adet stratejisinin olması halinde izlenecek çözüm yoludur. Bu kısımda, birinci oyuncunun basılamaz stratejilerinin olması durumunda, tüm stratejilerinin oynanma olasılıklarını uzun işlemlerle hesaplamak yerine grafik çözüm yöntemiyle oynanma olasılığı olan stratejilerini iki adet stratejiye indirecek. Daha sonrasında da $2 \times 2 -$ lik oyuna indirgediğimiz ödeme matrisi üzerinden oyunu çözeceğiz. Birinci oyuncunun kazançlarına göre verilmiş ödeme matrisi aşağıdaki gibi olsun:

$$
A = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} &
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Burada oyuncuların stratejileri arasında baskınlık olmadığından dolayı birinci ve ikinci oyuncuların stratejilerinin oynanma olasılıklarını bulmamız gerekmektedir. O halde oyuncuların her bir stratejiyi oynama olasılıkları da aşağıdaki gibi olsun;

$$
A = \begin{array}{c c c}
 & & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \\ B_1 & B_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_m \end{array} &
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} &
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Oyunun çözümü için ikinci oyuncunun optimal stratejilerini inceleyelim. Birinci oyuncunun A_1 stratejisini oynaması halinde ikinci oyuncunun kazancı:

$$q_1 a_{11} + q_2 a_{12} \leq v \qquad (1.45)$$

Birinci oyuncunun A_2 stratejisini oynaması halinde ikinci oyuncunun kazancı:

$$q_1a_{21} + q_2a_{22} \leq v \tag{1.46}$$

şeklinde devam edecektir ve birinci oyuncunun A_m stratejisini oynaması halinde ikinci oyuncunun kazancı aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$q_1a_{m1} + q_2a_{m2} \leq v \tag{1.47}$$

Burada $q_1 + q_2 = 1$ dir. Bu yüzden $q_1 = y$ ve $q_2 = 1 - y$ yazar ve eşitsizlikleri düzenlersek;

$$y\, a_{11} + (1-y)\, a_{12} \leq v \tag{1.48}$$

$$y\, a_{21} + (1-y)\, a_{22} \leq v \tag{1.49}$$

$$y\, a_{31} + (1-y)\, a_{32} \leq v \tag{1.50}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y\, a_{m1} + (1-y)\, a_{m2} \leq v \tag{1.51}$$

$$0 \leq y \leq 1$$

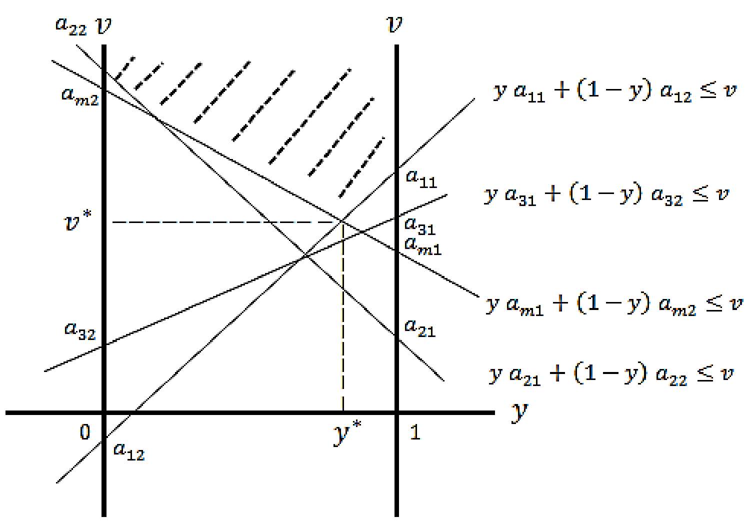
Amaç: $Min\ v$

Lineer programlama modelini elde ederiz. Elde ettiğimiz bu mevcut lineer programlama modelini grafik yöntemle çözersek Grafik 1.1'deki gibi bir uygun çözümler bölgesine ulaşırız.

Bu durumda; Grafik 1.1'den de görebileceğimiz gibi, bizi lineer programlama modelinin minimum çözümüne götüren (1.48) ve (1.51) eşitsizlikleridir. Bu iki eşitsizliğin kesişim noktası olan noktadan y doğrusuna ve v doğrusuna birer dikme indirerek y^* ve v^* optimum değerlerini elde ederiz. Yani ikinci oyuncunun optimal stratejileri (q_1^*, q_2^*) aşağıdaki gibidir;

$q_1^* = y^*$

$q_2^* = 1 - y^*$



Grafik 1.1: Uygun Çözümler Bölgesi

İkinci oyuncunun optimal stratejileri ise oyun değeri (1.48) ve (1.51) eşitsizliklerinden elde edildiğinden dolayı A_1 ve A_m stratejileridir. Bu iki strateji dışında diğer tüm stratejilerin oynanma olasılığı sıfırdır [37]. Böylece oyun aşağıdaki gibi $2 \times 2 -$ lik bir oyuna indirgenmiş olur.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \\ B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} p_1 & A_1 \\ p_m & A_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} \end{array}$$

[37] Ahlatçıoğlu, Tiryaki, a.g.e., s.58

Mevcut indirgenmiş olan $2 \times 2 -$ lik oyunumuzda, birinci oyuncunun optimal stratejilerinin oynanma olasılığı ise v^* değerini daha önce bulduğumuzdan dolayı aşağıda yer alan eşitlikler yardımıyla çözülebilir.

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{m1} = v^* \tag{1.52}$$

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{m2} = v^* \tag{1.53}$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$m \times 2 -$ lik oyunlar için bir diğer çözüm yolu da lineer programlama modelini simpleks çözüm yöntemiyle çözmektir. $m \times n - lik$ oyunlar için daha önce yazdığımız lineer programlama modelini burada ikinci oyuncu için uygularsak aşağıdaki modeli elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&y_1 a_{11} + y_2 a_{12} \leq 1 \\
&y_1 a_{21} + y_2 a_{22} \leq 1 \\
&\quad\vdots \\
&\quad\vdots \\
&y_1 a_{m1} + y_2 a_{m2} \leq 1 \\
&y_j \geq 0 \ , \qquad j = 1,2
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Amaç: $Max\ (y_1 + y_2)$

Burada tüm kısıtlarımız $\leq$ şeklindedir ve amaç fonksiyonumuzda $Max\left(\frac{1}{v}\right)$ olduğundan dolayı simpleks yöntemle doğru bir sonuç elde ederiz. Simpleks yöntemin çözümüne ulaştıktan sonra değiştirdiğimiz değişkenlere ters dönüşüm uygulayarak (q_1^*, q_2^*) ve v^* değerlerini bulabiliriz.

Birinci oyuncunun optimal stratejilerini bulmak için de aynı şekilde aşağıdaki modeli oluştururuz:

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ \dots\dots\dots \ + x_m a_{m1} \geq 1$$

$$x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ \dots\dots\dots \ + x_m a_{m2} \geq 1 \qquad (1.55)$$

$$x_i \geq 0 \ , \qquad i = 1,2, \dots\dots, m$$

Amaç: $Min \ \sum_{i=1}^{m} x_i$

Burada da tüm kısıtlarımız ≥ ve amaç fonksiyonumuz da $Min\left(\frac{1}{v}\right)$ olduğundan dolayı simpleks yöntemle doğru bir sonuç elde edebiliriz. Simpleks yöntemin çözümü sonucunda elde ettiğimiz değişkenlere ters dönüşüm uygulayarak yine aynı şekilde $(p_1^*, p_2^*, \dots\dots\dots, p_m^*)$ ve v^* değerlerini elde edebiliriz. Burada her iki sonuçta da elde ettiğimiz v^* değerleri birbirine eşit çıkacaktır.

Örnek 1.5: A oyuncusunun kazançları açısından verilen aşağıdaki oyun matrisinin grafik yöntemle çözümü devamında yer almaktadır.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} & \begin{bmatrix} -10 & 10 & -15 \\ 20 & -20 & 45 \\ 5 & 0 & 5 \\ -15 & 30 & -25 \\ 10 & -10 & 35 \\ 60 & -5 & 50 \end{bmatrix} \end{array}$$

A oyuncusu; 2. ve 5. stratejilerini 6. stratejisi tarafından basıldığı için eler. Bu elemelerden sonraki oyun matrisinde de ikinci oyuncunun 3. stratejisi 1. stratejisinden baskın olduğundan dolayı ikinci oyuncu 1. stratejisini eler. Son durumdaki oyun matrisi aşağıdaki şekli alır.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} b_2 & b_3 \end{array} \\
A = \begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 0 & 5 \\ 30 & -25 \\ -5 & 50 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Bu mevcut oyun matrisinin grafik yöntemle çözümüne yardımcı eşitsizlikler ve grafik aşağıdaki şekilde olacaktır.

$(q_2\,, q_3) = (y\,, 1 - y)$

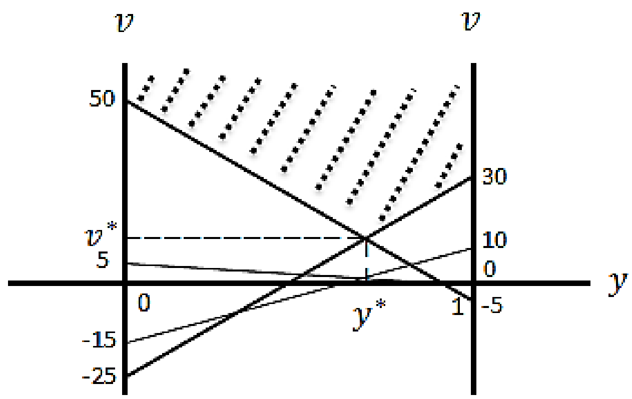
$10\,y - 15(1 - y) \leq v$

$0\,y + 5\,(1 - y) \leq v$

$30\,y - 25\,(1 - y) \leq v$

$-5\,y + 50\,(1 - y) \leq v$

Amaç: Min v



Grafik 1.2: Uygun Çözümler Bölgesi

Grafik 1.2'den de görüleceği gibi birinci oyuncunun 4. ve 6. stratejilerine denk gelen eşitsizliklerden elde edilen doğruların kesişim noktası çözümdür. Son durumda elde edilen 2×2 'lik oyun matrisi aşağıdaki şekildedir.

$$A = \begin{array}{c} \\ a_4 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & -25 \\ -5 & 50 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu mevcut 2×2 'lik oyun matrisinin konuda belirtilen yardımcı denklemlerle çözümü ve elde edilen nihai sonuçlar aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(0, \frac{15}{22}, \frac{7}{22}\right)$$

$$v^* = 12{,}5$$

1.3.1.8. $2 \times n -$ lik Oyunlar

$2 \times n -$ lik oyunlar da $m \times 2 -$ lik oyunlara benzerdir. Bu kısımda birinci oyuncunun iki adet, ikinci oyuncunun ise n adet stratejisinin olması durumundaki çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz. $2 \times n -$ lik bir oyun için ödeme matrisi aşağıdaki gibi olsun;

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \end{array}$$

Oyuncuların stratejileri arasında baskınlık durumunun kalmadığını düşünürsek, oyuncuların her bir stratejisinin oynanma olasılıklarını bulmamız gerekmektedir. Oyuncuların karma stratejilerini bulmak için her bir stratejilerinin oynanma olasılıkları aşağıdaki gibi olsun;

$$A = \begin{array}{cc} & \\ & \\ p_1 & A_1 \\ p_2 & A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu durumda oyunun çözümü için birinci oyuncunun optimal stratejilerini inceleyelim. İkinci oyuncunun B_1 stratejisini oynaması halinde birinci oyuncunun kazancı:

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} \geq v \qquad (1.56)$$

İkinci oyuncunun B_2 stratejisini oynaması halinde birinci oyuncunun kazancı:

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} \geq v \qquad (1.57)$$

Eşitsizlikleri şeklinde devam edecektir ve ikinci oyuncunun B_n stratejisini oynaması halinde birinci oyuncunun kazancı aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} \geq v \tag{1.58}$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Burada $p_1 + p_2 = 1$ olmasından dolayı $p_1 = x$ ve $p_2 = 1 - x$ olarak yazabiliriz. Eşitsizlikleri bu yaptığımız değişikliğe göre yeniden düzenlersek :

$$x\, a_{11} + (1 - x)\, a_{21} \geq v \tag{1.59}$$

$$x\, a_{12} + (1 - x)\, a_{22} \geq v \tag{1.60}$$

$$x\, a_{13} + (1 - x)\, a_{23} \geq v \tag{1.61}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x\, a_{1n} + (1 - x)\, a_{2n} \geq v \tag{1.62}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Amaç: $Max\ v$

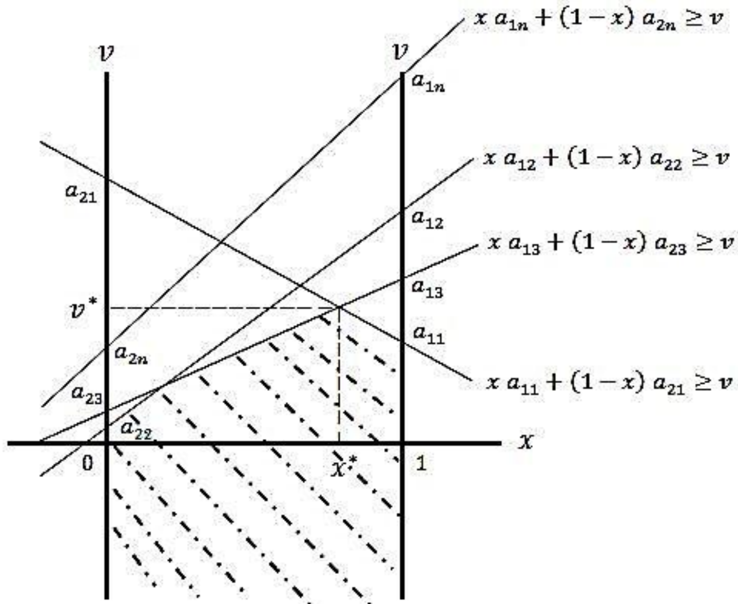
Elde ettiğimiz bu lineer programlama modelinin grafik yöntemle çözümünü yapacak olursak Grafik 1.3'deki gibi bir uygun çözümler bölgesi elde ederiz.

Lineer programlama modelinin Grafik 1.3'de yer alan çözümünü incelediğimiz zaman görüyoruz ki bizi maksimum çözüme götüren nokta (1.59) ve (1.61) eşitsizliklerinin kesişimi olan noktadır. Bu noktadan hareketle $x^*\ ve\ v^*$

optimum değerlerine ulaşabiliriz. O halde mevcut oyunumuz için birinci oyuncunun optimal stratejileri (p_1^*, p_2^*) aşağıdaki gibidir:

$p_1^* = x^*$

$p_2^* = 1 - x^*$



Grafik 1.3: Uygun Çözümler Bölgesi

Oyun değeri olan v^* değeri (1.59) ve (1.61) eşitsizliklerinin kesişim noktasından elde edildiğinden dolayı ikinci oyuncunun B_1 ve B_3 stratejileri dışında diğer tüm stratejilerinin oynanma olasılıkları sıfır olacaktır [38]. $2 \times 2 -$ lik bir ödeme matrisine indirgediğimiz oyunun v^* değerini de daha önceden bulduğumuzdan dolayı ikinci oyuncunun optimal stratejilerinin oynanma olasılıkları aşağıdaki gibi hesaplanır:

[38] Ahlatçıoğlu, Tiryaki, a.e., s.58

$$
A = \begin{array}{cc} & \\ & \\ p_1 & A_1 \\ p_2 & A_2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q_1 & q_3 \\ B_1 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$q_1 a_{11} + q_3 a_{13} = v^* \tag{1.63}$$

$$q_1 a_{21} + q_3 a_{23} = v^* \tag{1.64}$$

$$q_1 + q_3 = 1$$

$m \times 2-$ lik oyunlar kısmında bahsettiğimiz gibi $2 \times n-$ lik oyunlarda da lineer programlama modelini simpleks çözüm yöntemiyle çözülebilmektedir. Aşağıda birinci oyuncu için oluşturulmuş lineer programlama modeli gösterilmektedir.

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} \geq 1$$

$$x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \geq 1$$

$$x_1 a_{13} + x_2 a_{23} \geq 1 \tag{1.65}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} \geq 1$$

$$x_i \geq 0$$

Amaç: $Min\ (x_1 + x_2)$

Modelin simpleks yöntemle çözümüne ulaştıktan sonra değiştirdiğimiz değişkenlere bu sefer ters dönüşüm uygulayarak $(p_1^*,\ p_2^*)$ ve v^* değerlerini bulabiliriz.

Daha sonra ikinci oyuncunun optimal stratejilerini bulmak için oluşturulmuş lineer programlama modeli de aşağıda gösterilmektedir.

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \ \dots\dots\dots\ + y_n a_{n1} \leq 1$$

$$y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \ \dots\dots\dots\ + y_n a_{n2} \leq 1 \qquad (1.66)$$

$$y_j \geq 0 \ \ , j = 1,2, \dots\dots, n$$

Amaç: $Max \sum_{i=1}^{n} y_j$

LP modelinin simpleks yöntemle $(y_1^*, y_2^*, \dots\dots, y_m^*)$ çözümünü elde ettikten sonra, bu çözüme ters dönüşüm uygulayarak $(q_1^*, q_2^*, \dots\dots, q_m^*)$ ve v^* değerlerine ulaşabiliriz. Burada da aynı şekilde her iki çözümden elde edilen v^* değerleri birbirine eşit çıkacaktır.

Örnek 1.6: Bir önceki konuda yer alan Örnek 1.5 ‘in ikinci oyuncu açısından grafik yöntemle çözümü aşağıda yer almaktadır.

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -5 & 15 & 10 & -60 \\ -10 & 20 & 0 & -30 & 10 & 5 \\ 15 & -45 & -5 & 25 & -35 & -50 \end{bmatrix}$$

Bir önceki çözümde de bahsedildiği gibi baskın stratejilerden sonraki oyun matrisi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccc} a_1 & a_3 & a_4 & a_6 \end{array} \\
B = \begin{array}{c} b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -10 & 0 & -30 & 5 \\ 15 & -5 & 25 & -50 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Oyun matrisinin çözümüne yardımcı eşitsizlikler ve grafik yöntemle çözümü aşağıdaki şekilde olacaktır.

$(q_2\,, q_3) = (y\,, 1 - y)$

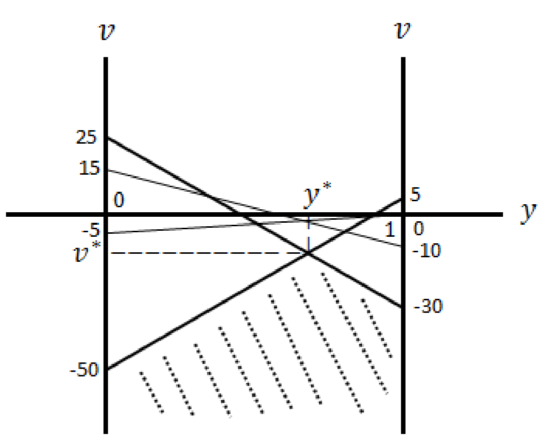
$-10\,y + 15(1 - y) \geq v$

$0\,y - 5\,(1 - y) \geq v$

$-30\,y + 25\,(1 - y) \geq v$

$5\,y - 50\,(1 - y) \geq v$

Amaç: Max v



Grafik 1.4: Uygun Çözümler Bölgesi

Bu çözümde amaç fonksiyonunun maksimize olmasının nedeni, oyun matrisinin ikinci oyuncunun kazançlarına göre düzenlenmiş olmasıdır. Problemde ve çözümde yer alan diğer değerler bir önceki çözümle aynı olacaktır fakat burada elde edeceğimiz oyun değerimiz de ikinci oyuncu açısından yani ilk çözümün negatif işaretlisi olacaktır. Burada sağlanan sonuçlar da aşağıda gösterilmektedir.

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a_4 & a_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -30 & 5 \\ 25 & -50 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(p_1\,,p_2\,,p_3\,,p_4\,,p_5\,,p_6) = \left(0\,,0\,,0\,,\frac{1}{2}\,,0\,,\frac{1}{2}\right)$$

$$(q_1\,,q_2\,,q_3) = \left(0\,,\frac{15}{22}\,,\frac{7}{22}\right)$$

$$v^* = -12{,}5$$

1.3.2. Sıfır Toplamlı Olmayan İki Kişili Oyunlar

Sıfır toplamlı olmayan iki kişili oyunların çözümleri de sıfır toplamlı olanlarla aynıdır. Aralarındaki fark ise adından da anlayacağımız gibi, oyuncuların oyun sonunda elde ettikleri değerler toplamı sıfıra eşit çıkmamaktadır. Yani her iki oyuncunun da oynanacak stratejiler karşısında elde edecekleri değerler birbirlerinden mutlak değerce de farklı olacaktır. Bu tip oyunlarda genellikle her bir oyuncunun oyun matrisi, farklı bir matriste göstermek suretiyle iki farklı matris oluşturularak gösterilmektedir. Örnek gösterimler aşağıda verilmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & {}_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Oyuncuların oyun sonunda elde edecekleri değerler farklı olacağından dolayı bu tip iki ayrı oyun matrisi bulunan oyunlarda tek bir oyun değeri de mevcut olmayacak, oyuncuların oyun değerleri de birbirinden mutlak değerce de farklılık gösterecektir.

Oyuncuların kazançları birbirinden farklı olduğundan dolayı baskın strateji, karma strateji, lineer programlama modeli ve simpleks yöntemle çözüm için bu tip oyunlarda ikinci oyuncu; sıfır toplamlı oyunlarda birinci oyuncu için anlatılan şekillerde kendi ödeme matrisi üzerinden çözümleyecektir. Yani oyunumuz sıfır toplamlı bir oyun olmadığından dolayı, ikinci oyuncu birinci oyuncunun tersi işlemler yaparak çözüme ulaşmak yerine, birinci oyuncu gibi kazancını maksimize etmek için çaba gösterecektir.

Örnek 1.7: Bir şehirde hizmet vermekte olan birbirine rakip iki kahve firması bulunmaktadır. Bu firmalar hizmet ağını genişletmek için birer adet yeni şube açacaktır. A firmasının şube açmayı düşündüğü 4 adet farklı yer alternatifi varken B firmasının ise 3 adet farklı yer seçeneği bulunmaktadır. Her iki firma için de yeni şubelerin açılacakları yerlere ve birbirlerine olan konumlarına göre bir günlük müşteri potansiyelleri aşağıdaki matrislerde verilmektedir. Firmalar için en uygun şube yerlerinin belirlenmesine dair çözüm aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{array}{c} \\ Şa_1 \\ Şa_2 \\ Şa_3 \\ Şa_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Şb_1 & Şb_2 & Şb_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 80 & 130 \\ 50 & 65 & 90 \\ 70 & 50 & 55 \\ 60 & 85 & 45 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ Şa_1 \\ Şa_2 \\ Şa_3 \\ Şa_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Şb_1 & Şb_2 & Şb_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 55 & 70 & 60 \\ 45 & 90 & 100 \\ 65 & 80 & 95 \\ 50 & 75 & 65 \end{bmatrix} \end{array}$$

A firmasının 1. şube yerinin müşteri potansiyeli 2. şube yerinin müşteri potansiyelinden fazla olduğundan dolayı şube açılması düşünülen 2. yer elenir.

Aynı şekilde A firmasının 1. şube yerinin müşteri potansiyeli 3. şube yerinin müşteri potansiyelinden fazla olduğundan dolayı şube açılması düşünülen 3. yer de elenir. A firmasının baskın stratejisi kalmadığından dolayı B firmasına geçilir.

A firması 2. ve 3. şube yerini eleyeceğinden dolayı B firmasının inceleyeceği oyun matrisi aşağıdaki hali alacaktır.

$$B = \begin{array}{c} \\ Şa_1 \\ Şa_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Şb_1 & Şb_2 & Şb_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 55 & 70 & 60 \\ 50 & 75 & 65 \end{bmatrix} \end{array}$$

Son durumdaki B firmasının ödemeler matrisinde 2. şube yerinin müşteri potansiyeli 1. ve 3. şube yerinin müşteri potansiyelinden fazla olduğundan dolayı B firması şube açmayı düşündüğü 1. ve 3. yeri eler.

B firmasının strateji seçimlerinden sonraki durumda; A firması da 4. yerin müşteri potansiyeli daha iyi olduğundan dolayı 4. şube yerini seçecektir.

Oyun matrisi çözüldükten sonra elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde oluşur:

- A firması 4 numaralı yere şube açmayı seçecektir ve bir günlük müşteri potansiyeli 85 kişi olacaktır.
- B firması 2 numaralı yere şube açmayı seçecektir ve bir günlük müşteri potansiyeli de 75 kişi olacaktır.

2. ÇOK KİŞİLİ OYUNLAR

2.1. Ortaksız Oyunlar

Bu kısımda n – kişili oyunlar yani $n \geq 3$ olarak işleyeceğimiz durumlar genel anlamda iki kişili oyunlardan farklı bir tanıma sahip değildir ve aynı genel oyun tanımıyla gösterilmektedir. İlk kısımda da gösterdiğimiz ortaksız oyunun genel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma =< I \,, \{S_i\}_{i \in I} \,, \{H_i\}_{i \in I} > \qquad (2.1)$$

Γ keyfi bir ortaksız oyun olmak üzere burada $i \in I$ ve $\forall i \in I$ için stratejiler kümesi S_i 'dir. H_i ise $i.$ oyuncuya yapılacak olan ödemeyi belirtmektedir.

Bu durumun dışında bir de oyuncuların tek bir çözüme ulaşamadığı, karma stratejilerin meydana geldiği durumlar vardır. Bu durumları da kısaca inceleyelim:

σ_i : $i.$ oyuncunun karma stratejisi

$\sigma_i(s_i)$: $i.$ oyuncunun s_i stratejisini oynama olasılığı

olmak üzere i oyuncusunun s_i stratejisini oynama olasılığı diğer oyuncuların stratejilerini oynama olasılıklarından bağımsızdır. Öyleyse i oyuncusunun herhangi bir karma strateji yapısının oluşması durumu oyuncunun kendi stratejilerinin ayrı ayrı oluşma olasılıklarının çarpımına eşittir. Bu durum aşağıdaki eşitlikle gösterilebilir:

$$\sigma(s) = \sigma(s_1, s_2, \dots \dots, s_n) = \sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2) \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \sigma_n(s_n) \qquad (2.2)$$ [1]

Burada gösterdiğimiz mevcut olasılıksal durumdan yola çıkarak $i.$ oyuncunun ödeme fonksiyonunun beklenen değerini ise aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanabilecektir.

[1] Ahlatçıoğlu, Tiryaki, a.g.e., s.128

$$H_i(\sigma) = \sum_{s\in S} H_i(s)\sigma(s) = \sum_{s_1\in S_1}\sum_{s_2\in S_2}\cdots\sum_{s_n\in S_n} H_i(s_1, \dots\dots, s_n)\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(s_i) \quad (2.3)$$

Bu ödeme fonksiyonunu da göz önüne alarak Γ oyunun karma yapısı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$\Gamma^* =< I\ , \{KS_i\}_{i\in I}\ , \{H_i\}_{i\in I} >\ ^{2} \quad (2.4)$$

Çok kişili oyunlarda da iki kişili oyunlarda olduğu gibi denge durumu ve eyer noktası mevcuttur. Oyuncular eyer noktasındaki stratejilerini değiştirmeleri, yerine başka strateji oynamaları durumunda kazançları azalacaktır. Aynı zamanda bir oyunun birden fazla denge durumunun oluşması da mümkündür fakat oyuncuların tüm denge durumlarında elde edecekleri kazançlar eşit olacaktır. Böyle hallerde oyunda ayrıca denge durumları kümesi oluşacaktır ve bu küme konveks bir bölge oluşturur.

2.2. Ortaklı Oyunlar

Kurulacak bir çok kişili oyunda $(n \geq 2)$ yer alan bazı oyuncular rakip oyunculara karşı daha fazla üstünlük elde edebilmek için bir takım anlaşmalar, koalisyonlar yapabilmektedirler. Oyuncular arasında bu şekilde oluşabilecek koalisyonlarda herhangi kısıtlamalar mevcut değildir. Hatta oyuncular arasında ek ödemeler ve kazançlar sağlayan devredilebilir faydalar mevcuttur. Bu ek ödemeler oyuncuları koalisyonlara, ittifaklara teşvik etmek için kullanılabileceği gibi bazı oyuncularla ortak fayda stratejilerini elde edebilmek için de kullanılabilmektedir. Bu tip koalisyonel formda bir oyunda oyuncular amaçlarına ve hedefledikleri kazançlara daha yakın hale gelebilecek veya daha yüksek beklentilere girebileceklerdir.

[2] A.e., s.129

Koalisyonların olduğu bir oyunda yapılacak şey oyunu normal stratejik formdan koalisyonel forma dönüştürmektir. Bunun için de öncelikle ortaklı oyunlarda yer alan tanımlamaları görelim.

$n \geq 2$ ve $I = \{1,2, \dots \dots, n\}$ olmak üzere $K \subset I$ bir koalisyon olsun. Ortaklı oyunlarda boş kümede bir koalisyondur ve boş küme koalisyon oluşmaması halini temsil etmektedir. Bu koalisyona ise boş koalisyon denilmektedir. Bunun aksine durum olan tüm oyuncuların koalisyon oluşturması durumuna ise ana koalisyon denir ve I kümesi ile tanımlanır. Örneğin;

$n = 2$ olması durumunda $\{\phi, \{1\}, \{2\}, I\}$ şeklinde 4 farklı koalisyon oluşabilecektir.

$n = 3$ olması durumunda $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, I\}$ şeklinde 8 farklı koalisyon oluşabilecektir.

$\vdots \qquad \qquad \vdots$

n oyuncu için $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \dots \dots, \{1,2, \dots \dots, (n-1)\}, I\}$ şeklinde 2^n adet farklı koalisyon oluşabilecektir.

Bu durumları genelleyecek olursak bir oyunun mevcut tüm koalisyonlar kümesi 2^I ile gösterilir.

2.2.1. Karakteristik Form

$I = \{1,2, \dots \dots, n\}$ oyuncular kümesini ve oyunun ödeme fonksiyonu v olmak üzere ortaklı bir oyun (I, v) şeklinde gösterilir ve bu forma aynı zamanda oyunun karakteristik fonksiyonu denir [3].

[3] Robert P. Gilles, Theory and Decision Library Series C: Game Theory Mathematical Programming and Operations Research Volume 44, “The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010, s.11

Ortaklı bir oyunda K keyfi bir koalisyon olsun. $v(K)$, K koalisyonunun oyundan elde edeceği ödemeyi ya da faydayı ifade etmektedir. Daha önce boş koalisyon ifadesini açıklamıştık. Tanımı da göz önüne alınacak olursa boş koalisyonun ödeme fonksiyonunun değeri doğal olarak sıfıra eşit olacaktır ve bu ifade şu şekilde gösterilir;

$$v(\phi) = 0 \tag{2.5}$$

Toplanabilirlik: K ve L aynı oyuna ait ayrık iki farklı koalisyon olmak üzere bu iki koalisyonun da yeniden bir koalisyon oluşturmaları durumunda elde edecekleri fayda ayrı koalisyonlar olarak elde edecekleri faydaların toplamına eşit olabilir. Bu duruma toplanabilirlik [4] denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$v(K) + v(L) = v(K \cup L) \tag{2.6}$$

Süpertoplanabilirlik: K ve L aynı oyuna ait ayrık iki farklı koalisyon olmak üzere iki koalisyonun da yeniden bir koalisyon oluşturmaları durumunda elde edecekleri fayda ayrı koalisyonlar olarak elde edecekleri faydaların toplamından büyük veya eşit olabilir. Bu duruma süpertoplanabilirlik [5] denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$v(K) + v(L) \leq v(K \cup L) \tag{2.7}$$

2.2.2. Ödemeler

Bir oyunda yer alan her $K \in 2^I$ koalisyonun ödemesi $v(K)$ olsun. K koalisyonunun kazancı olan $v(K)$, koalisyonda yer alan tüm oyuncuların

[4] A.e., s.13
[5] A.e., s.13

kazançlarının toplamına da eşit olacaktır. Bu eşitlik aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$v(K) = \sum_{i \in K} v_i(s_1\,, s_2\,, \dots \dots, s_n) \tag{2.8}$$

Bu eşitlik aynı zamanda koalisyonda yer alan oyuncuların koalisyon halinde sadece kendi stratejilerinden dolayı – koalisyonsuz formda kendi stratejilerinden dolayı elde edebilecekleri miktarlar – alabilecekleri minimum kazançları belirtmektedir. Bu da bizi (2.6) ‘da yer alan toplanabilirlik özelliğiyle aynı ifadeye götürmektedir.

Bunun yanı sıra koalisyon halinde oyuncuların birlikte hareket etmelerinden doğacak yeni stratejiler veya ekstra kazançlar oluşabilecektir. Örneğin; şirket birleşmelerinde sermaye miktarının artmasından, büyümesinden doğabilecek ekstra faydalar, şube sistemiyle çalışan şirketlerde şube sayılarının artması veya daha geniş şube ağına sahip olma gibi koalisyonlara bir takım ekstra faydalar da kazandırmaktadır ve daha önce de belirttiğimiz gibi bu durumlar da oyuncular için teşvik oluşturabilmektedir. Oluşabilecek böyle durumlar oyuncuların sadece kendi stratejilerinden doğacak olan toplam kazanca artı değerler katacaktır. Bu durum da bize (2.7) eşitsizliğinde gösterilen ortaklı oyunların süpertoplanabilirlik özelliğini ifade etmektedir.

2.2.3. İki Kişili Oyuna Dönüştürme

2.2.3.1.Sıfır Toplamlı Oyunlar

N – kişili bir oyunda $\forall\, i \in I$ için i oyuncusunun pür stratejiler kümesi S_i ve her bir oyuncunun oynadığı stratejiler sırasıyla $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots \dots, s_n \in S_n$ olması halinde i oyuncusunun ödeme fonksiyonu $v_i(s_1, s_2, \dots \dots, s_n)$ olmak üzere oyunun stratejik formu $(S_1, S_2, \dots \dots, S_n; v_1, v_2, \dots \dots, v_n)$ şeklinde gösterilecektir.

$K \in 2^I$ keyfi bir koalisyon ve keyfi K koalisyonuna karşı oynayan diğer tüm oyuncular da $K' \in 2^I$ olsun. Yani K' koalisyonu $(I - K)$ elemanlarından oluşacaktır. Oyun sıfır toplamlı bir oyun olduğundan dolayı; oyuncuların sırasıyla $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots \dots, s_n \in S_n$ stratejilerini oynaması halinde toplam kazançları

$$\sum_{i \in I} v_i(s_1, s_2, \dots \dots, s_n) = 0 \tag{2.9}$$

şeklinde sıfıra eşit olacaktır. Öyleyse bu durumda da K ve K' koalisyonlarının elde edecekleri kazançlar toplamı da sıfır olacaktır.

$$v(K) + v(K') = 0 \tag{2.10}$$

İki kişili sıfır toplamlı oyunlarda olduğu ve (2.9)'dan da çıkarılabileceği gibi koalisyonların ödemeleri aşağıda gösterildiği şekilde birbirlerinin ters işaretli halleri olacaklardır.

$$v(K) = -v(K') \tag{2.11}$$

$$\sum_{i \in K} v_i(s_1, s_2, \dots \dots, s_n) = -\left[\sum_{j \in K'} v_j(s_1, s_2, \dots \dots, s_n)\right] \tag{2.12}$$

2.2.3.2.Sıfır Toplamlı Olmayan Oyunlar

Aynı şekilde $K \in 2^I$ keyfi bir koalisyon ve keyfi K koalisyonuna karşı oynayan diğer tüm oyuncular da $K' \in 2^I$ olsun. Sıfır toplamlı olmayan bir oyunda oyuncuların sırasıyla $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots \dots, s_n \in S_n$ stratejilerini oynamaları halinde toplam kazançları da

$$\sum_{i \in I} v_i(s_1\,, s_2\,, \dots\dots, s_n) = V \qquad (2.13)$$

şeklinde olsun. Toplam faydayı koalisyonlar; yani iki kişili oyun formunda inceleyecek olursak bize çözümde kolaylık sağlayacak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$v(K) + v(K') = V \qquad (2.14)$$

$$\sum_{i \in K} v_i(s_1\,, s_2\,, \dots\dots, s_n) + \sum_{j \in K'} v_j(s_1\,, s_2\,, \dots\dots, s_n) = V \qquad (2.15)$$

2.2.4. İmputasyon ve Çekirdek

Bireyler ya da ayrık koalisyonlar tarafından oluşturulan yeni koalisyonların nihai faydasının koalisyonda yer alan oyuncuların tümünün toplam faydası kadar olacağını daha önce de belirtmiştik. Bu toplam faydaya ulaşmak için koalisyonda yer alan bireylerin tümünün rasyonel, akli davranışlar içinde olması gerekmektedir ve öyle oldukları varsayılır. Oyuncuların koalisyonlar oluşturmalarını mantıklı kılan da bir takım kontrolleri vardır. Örneğin; koalisyona giren bir oyuncu koalisyondan elde ettiği kazancın bireysel olarak oynadığında elde edebileceği kazanca eşit veya ondan daha fazla olmasını bekler. Koalisyonlarda yer alan oyunculara yapılacak ödemeler toplamı oyun değerinden eksik ya da fazla olmamalı, oyun değerine eşit olmalıdır. Bu kontrolleri tanımsal olarak inceleyecek olursak da aşağıdaki tanımları elde ederiz:

Bireysel Rasyonalite: $v = (v_1\,, v_2\,, \dots\dots, v_n)$ ödeme vektörü olsun. $\forall\ i \in I$ oyuncusu için

$$v_i \geq v(i) \qquad (2.16)$$

koşuluna bireysel rasyonalite [6] denir.

Grup Rasyonalitesi: $v = (v_1, v_2, \dots\dots, v_n)$ ödeme vektörü olmak üzere

$$\sum_{i \in I} v_i = v(I) \tag{2.17}$$

koşuluna ise grup rasyonalitesi [7] denir.

(2.17)'deki eşitliğin büyüktür ya da küçüktür olması durumlarında ya oyuncular tarafından kabul edilmeyen ya da oyun için imkansız durumlar oluşacaktır. Bu iki tanımdan da anlaşılacağı gibi bu noktadaki ana sorun v ödeme vektörüne atanacak miktarlardır.

Çekirdek Noktaları: Oyunun toplam kazancının v vektöründeki farklı bölünmelerine çekirdek noktaları denir.

$\forall\, i \in I$ oyuncusu için bireysel ve grup rasyonalite şartlarının sağlandığı her $v = (v_1, v_2, \dots\dots, v_n)$ fayda vektörüne İmputasyon denir.

Ortaklı bir oyunda başka imputasyon tarafından basılamayan imputasyonların oluşturdukları kümeye ise Çekirdek denir.

Süpertoplanabilirlik özelliğinden dolayı imputasyonlar kümesinin boş olması mümkün değildir.

Oyunlarda kesinlikle koalisyonlar oluşacak diye bir zorunluluk da bulunmamaktadır. Aksine bazı oyunlarda koalisyonlar gereksiz bile olabilmektedir. Örneğin; $\sum_{i=1}^{n} v(i) = v(I)$ koalisyon gereksiz oyunken $\sum_{i=1}^{n} v(i) < v(I)$ ise koalisyon gerekli oyundur. Eğer bir oyunun çözümü için koalisyonlar gereksiz ise

---

6 Ahlatçıoğlu, Tiryaki, a.g.e., s.173
7 A.e., s.173

oyuncuların hepsinin oyunda tek başlarına yer aldığı $v = \big(v(1)\,, v(2)\,, \ldots\ \ldots, v(n)\big)$ ana imputasyonu çözüm olarak kabul edilir.

2.2.5. Kukla Oyuncu

(I, v) ortaklı oyununda $\forall\, K \in 2^I$ koalisyonu için $v(i \cup K) = v(K)$ veya $v(K/i) = v(K)$ olacak şekilde hiçbir koalisyona kar ya da zarar hiçbir katkı sağlamayan oyuncuya kukla oyuncu adı verilir. Ortaklı oyunlarda özellikle kazancı sıfır olan oyuncular için bu durum geçerli olmaktadır.

Kukla oyuncunun aksine bir şekilde koalisyona ve oyuna katkı sağlayan diğer tüm oyunculara ise oyunun desteği denir.

2.2.6. Shapley Değeri

Ortaklı oyunların, koalisyonların en büyük problemlerinden biri ödemelerin adil olarak dağıtılmasıdır. Shapley değeri de bu noktada oyuncuların oyun içindeki değerleri ya da diğer bir ifadeyle değer ölçümlerini vermektedir diyebiliriz. Biz bu kısımda Shapley değerinin bulunması için kullanılabilecek üç farklı formülü inceleyeceğiz. İlk olarak literatürde en çok yer alan formülasyonu inceleyelim:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{K \subset I \\ i \in K}} \frac{(I-K)!\,(K-1)!}{I!}\,[v(K) - v(K-i)] \quad (2.18)$$ [8]

Bu formülde yer alan *K* ifadesi koalisyonda yer alan oyuncu sayısını; *I*, oyunda yer alan toplam oyuncu sayısını; *v(K),* K koalisyonunun toplam ödemesini; *v(K-i),* K koalisyonunun i oyuncundan ayrı olarak ödemesini ifade etmektedir. O

[8] Alvin E. Roth, "Introduction to the Shapley Value", The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley, Ed. Alvin E. Roth, New York, Cambridge University Press, 1988, s.6

halde burada yer alan $[v(K) - v(K - i)]$ ifadesi i oyuncusunun K koalisyonuna katkısını açıklamaktadır. Yani bir oyuncunun Shapley değeri dahil olduğu her koalisyon için koalisyona sağladığı fayda, oyunda yer alan oyuncu sayısıyla koalisyonda yer alan oyuncu sayısının farkının faktöriyeli ve koalisyonda yer alan oyuncu sayısının bir eksiğinin faktöriyelinin çarpım değerlerinin toplamı ve bu toplamın oyuncu sayısının faktöriyeline bölümüne eşit olacaktır. Bu durum da gösteriyor ki her oyuncu sadece bir adet Shapley değerine sahip olacaktır.

Örnek 2.1: Koalisyonlar ve ödemeleri aşağıdaki tabloda verilen *v* oyununda yer alan oyuncuların Shapley değerlerinin (2.18) ‘de yer alan formül kullanılarak elde edilmesi ve toplamların ana koalisyon değerine eşit olduğu aşağıda gösterilmektedir.

Koalisyon	∅	1	2	3	4	{1.2}	{1,3}	{1,4}	{2,3}
Ödemesi (*v*)	0	1	3	4	5	5	5	8	7

Koalisyon	{2,4}	{3,4}	{1,2,3}	{2,3,4}	{1,3,4}	{1,2,4}	{1,2,3,4}
Ödemesi (*v*)	9	11	12	15	12	11	16

$$\phi_1(v) = \sum_{\substack{K \subset I \\ 1 \in K}} \frac{(4-K)!\,(K-1)!}{4!}[v(K) - v(K-1)]$$

formülü 1. oyuncu için olmak üzere; oyunda yer alan tüm oyuncuların bulundukları koalisyonlar için elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların toplamlarından elde edilen Shapley değerleri sırasıyla aşağıda verilmektedir.

$$\phi_1(v) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 2 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 5 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1{,}67$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 3 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 7 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 4 = 3{,}83$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 6 + \frac{1}{12}\cdot 7 + \frac{1}{12}\cdot 6 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 5 = 4{,}83$$

$$\phi_4(v) = \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{12}\cdot 7 + \frac{1}{12}\cdot 6 + \frac{1}{12}\cdot 7 + \frac{1}{12}\cdot 8 + \frac{1}{12}\cdot 7 + \frac{1}{12}\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 4 = 5{,}67$$

Bu oyunda yer alan tüm oyuncuların Shapley değerlerini toplarsak:

$$\phi_1(v) + \phi_2(v) + \phi_3(v) + \phi_4(v) = 1{,}67 + 3{,}83 + 4{,}83 + 5{,}67 = 16$$
$$= v(\{1,2,3,4\})$$

Ana koalisyon değeri olan 16'nın oyuncuların Shapley değerlerinin toplamına eşit olduğu görülür.

Bu formülün yanında Shapley değerini hesaplamaya yarayan ikinci bir yöntem de aşağıdaki şekilde formülize edilmektedir:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{K\subset I \\ i\in K}} \frac{\Delta_v(K)}{|K|} \qquad (2.19)$$ [9]

$1, 2, 3, \ldots, \{1\,,2\}\,, \{1\,,3\}\,, \ldots\ldots$ elemanlı şekilde sıralı her koalisyon için bu formülde yer alan $\Delta_v(K)$ ifadesi, değeri hesaplanacak koalisyonda yer alan oyuncuların toplam $v(K)$ değeri ile daha önce dahil oldukları koalisyon konbinasyonlarının $\Delta_v(K)$ değerlerinin toplamlarının farkını ifade etmektedir. $|K|$ ifadesi ise bir önceki formülden de anlaşılacağı gibi koalisyonda yer alan oyuncu

[9] Gilles, a.g.e., s.72

sayısını ifade etmektedir. Bir oyuncunun Shapley değerini hesaplanmak için ise dahil olduğu tüm koalisyonlar için elde edilen bu bölümlerin toplamları alınır.

Örnek 2.2: Örnek 2.1'de yer alan problemin (2.19) formülünü kullanarak bulunması aşağıda yer almaktadır.

Koalisyon	∅	1	2	3	4	{1.2}	{1,3}	{1,4}	{2,3}
Ödemesi (v)	0	1	3	4	5	5	5	8	7
$\Delta_v(K)$	0	1	3	4	5	1	0	2	0

Koalisyon	{2,4}	{3,4}	{1,2,3}	{2,3,4}	{1,3,4}	{1,2,4}	{1,2,3,4}
Ödemesi (v)	9	11	12	15	12	11	16
$\Delta_v(K)$	1	2	3	0	-2	-2	-2

Koalisyonların tabloda bulunmuş olan $\Delta_v(K)$ değerleri kullanılarak elde edilen Shapley değerleri aşağıdaki şekilde bulunacaktır.

$$\phi_1(v) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{-2}{4} = \frac{5}{3} = 1{,}67$$

$$\phi_2(v) = \frac{3}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{3} + \frac{0}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{-2}{4} = \frac{23}{6} = 3{,}83$$

$$\phi_3(v) = \frac{4}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{0}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{-2}{4} = \frac{29}{6} = 4{,}83$$

$$\phi_4(v) = \frac{5}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{0}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{-2}{4} = \frac{17}{3} = 5{,}67$$

Son olarak ele alacağımız Shapley değeri hesaplama yöntemi ise (2.18) ve (2.19)'da gösterilen yöntemlerden biraz daha uzun şekilde bulunabilmektedir. Bu yöntemde oyunculara yapılacak öncelikli ödemelerin kombinasyonlarına ait tüm değerler bulunduktan sonra her oyuncu için bulunan bu değerlerin ortalamaları bize Shapley değerini verecektir. Örneğin; dört oyuncudan oluşan bir oyunda 1-2-3-4 şeklinde olan bir kombinasyonda birinci oyuncu $v(1)$ miktarında ödeme alacaktır. İkinci oyuncu ise $v(\{1,2\}) - v(1)$, üçüncü oyuncu $v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})$, dördüncü oyuncuda $v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,2,3\})$ değerinde ödemeyi alacaktır. Kombinasyonun 2-1-4-3 şeklinde olması durumunda da aynı şekilde ikinci oyuncu $v(2)$, birinci oyuncu $v(\{1,2\}) - v(2)$, dördüncü oyuncu $v(\{1,2,4\}) - v(\{1,2\})$, üçüncü oyuncu $v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,2,4\})$ değerinde ödeme alacaktır. Bu örnekte gördüğümüz gibi dört kişili bir oyunda 24 farklı kombinasyon elde edilecektir. Oyuncuların Shapley değerleri de her oyuncu için elde edilecek bu değerlerin toplamının 24'e bölümüyle bulunabilmektedir. Bu çözüm yöntemi Örnek 2.3 'te ayrıntılı olarak görülmektedir.

Örnek 2.3: Örnek 2.1'de yer alan problemin bu çözüm yöntemine uygulanmasına dair çözüm aşağıda yer almaktadır.

Oyunculara yapılacak ödemelere ait tablo yöntemde belirtilen şekilde aşağıda gösterilmektedir. Tablonun alt kısmında ise her oyuncu için bu ödemelerden elde edilen ortalamalar, Shapley değerleri yer almaktadır.

Oyuncuların Ödeme Sıralamaları	Oyuncular			
	1	2	3	4
1-2-3-4	1	4	7	4
1-2-4-3	1	4	5	6
1-3-2-4	1	7	4	4
1-3-4-2	1	4	4	7
1-4-2-3	1	3	5	7
1-4-3-2	1	4	4	7
2-1-3-4	2	3	7	4
2-1-4-3	2	3	5	6
2-3-1-4	5	3	4	4
2-3-4-1	1	3	4	8
2-4-1-3	2	3	5	6
2-4-3-1	1	3	6	6
3-1-2-4	1	7	4	4
3-1-4-2	1	4	4	7
3-2-1-4	5	3	4	4
3-2-4-1	1	3	4	8
3-4-1-2	1	4	4	7
3-4-2-1	1	4	4	7
4-1-2-3	3	3	5	5
4-1-3-2	3	4	4	5
4-2-1-3	2	4	5	5
4-2-3-1	1	4	6	5
4-3-1-2	1	4	6	5
4-3-2-1	1	4	6	5

Ortalama	40/24	92/24	116/24	136/24
$\emptyset_i(v)$	1,67	3,83	4,83	5,67

Her oyuncu için farklı farklı olan bu Shapley değerlerinin geçerli olmasını sağlayan bir takım şartlar da bulunmaktadır. Bu şartlar aşağıda tanımları ve açıklamaları da verilen Shapley Aksiyomlarıdır ve dört adettir.

Kukla Oyuncu: Kukla oyuncuların dahil oldukları her koalisyon için fayda ya da zarar ifade etmediklerini ve dolayısıyla ödemelerinin de sıfıra eşit olduğunu daha önce de aktarmıştık. Bu durumda kukla oyuncuların Shapley Değerleri de doğal olarak sıfıra eşit olacaktır.

$\forall K \in 2^I$ koalisyonu için $v(K \cup i) - v(K) = 0$ şeklinde *i.* oyuncu kukla oyuncu ise; $\phi_i(v) = 0$ ‘dır [10].

Örnek 2.4: Aşağıda koalisyonlar ve ödemeleri verilen oyunda kukla oyuncunun varlığını araştırınız.

Koalisyon	∅	1	2	3	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
Ödeme (v)	0	2	0	1	2	4	1	4

Oyuncuların Shapley değerleri aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\phi_1(v) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

[10] Eyal Winter, “The Shapley Value”, Handbook of Game Theory with Economic Applications, C.III, Ed. Robert Aumann, Sergiu Hart, Hollanda, Elsevier Science B.V., 2002, s.2029

Oyuncuların Shapley değerleri incelendiğinde 2. oyuncunun kukla oyuncu olduğu görülmektedir. Şimdi de 2. oyuncunun dahil olduğu koalisyonları inceleyelim:

$$v(\emptyset \cup 2) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$$

$$v(1 \cup 2) - v(1) = 2 - 2 = 0$$

$$v(3 \cup 2) - v(3) = 1 - 1 = 0$$

$$v(\{1,3\} \cup 2) - v(\{1,3\}) = 4 - 4 = 0$$

Eşitliklerden de anlaşılacağı gibi 2. oyuncunun hiçbir koalisyona aktif bir katkısı yoktur. Bu nedenle de 2. oyuncu *Kukla Oyuncu*'dur.

Toplamsallık: Bir oyuncu kümesi üzerinde tanımlanmış farklı oyunların Shapley değerlerinin toplamları, oyunların toplamlarının Shapley değerine eşittir ve bu durum her oyuncu için de geçerlidir.

$\forall\, v, w$ oyunu için $\phi(v) + \phi(w) = \phi(v + w)$ ve

$\forall\, i \in I$ için $\phi_i(v) + \phi_i(w) = \phi_i(v + w)$ [11].

Simetri: Bir oyunda yer alan birbirinden farklı iki oyuncunun simetrik olması durumunda bu oyuncuların Shapley değerleri de birbirine eşit olacaktır.

$i, j \notin K$ olmak üzere $\forall\, K \in 2^I$ için $v(K \cup i) = v(K \cup j)$ ise $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ 'dir[12].

[11] Roth, a.g.e., s.5
[12] Winter, a.g.e., s.2029

Örnek 2.5: Aşağıda; koalisyonlar ve ödemeleri verilen oyunda simetrik oyuncuların varlığının araştırılmasına dair çözüm yer almaktadır.

Koalisyon	∅	1	2	3	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
Ödeme (v)	0	3	2	3	6	7	6	10

Öncelikle oyuncuların Shapley değerlerini inceleyelim.

$$\phi_1(v) = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{11}{3}$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{8}{3}$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{11}{3}$$

$\phi_1(v) = \phi_3(v)$ olduğundan dolayı 1. Ve 3. Oyuncunun simetrik olma durumlarını inceleyelim.

$$\left.\begin{array}{l} v(\emptyset \cup 1) = 3 \\ v(\emptyset \cup 3) = 3 \end{array}\right\} \; v(\emptyset \cup 1) = v(\emptyset \cup 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} v(2 \cup 1) = 6 \\ v(2 \cup 3) = 6 \end{array}\right\} \; v(2 \cup 1) = v(2 \cup 3)$$

Bu durumda 1. ve 3. oyuncu simetriktir diyebiliriz.

Verimlilik: Oyunda yer alan oyuncuların Shapley değerlerinin toplamı ana koalisyon halindeki Shapley değerine eşittir. I, v oyununun desteği olmak üzere

$$\sum_{i \in I} \phi_i(v) = v(I) \tag{2.20}$$

dır [13].

Bu dört aksiyomu sağlayan ve aşağıda yer alan formüller yardımıyla hesaplanan değerlere Shapley değerleri ve oyunda yer alan tüm oyuncuların Shapley değerlerinin oluşturduğu vektöre de Shapley vektörü denir. Her oyunda burada gösterdiğimiz dört aksiyomu sağlayan yalnızca tek bir adet Shapley vektörü bulunur.

Örnek 2.6: Örnek 2.1 'de yer alan oyunu verimlilik açısından değerlendirilmesi de aşağıda yer almaktadır.

$$\sum_{i \in I} \phi_i(v) = \phi_1(v) + \phi_2(v) + \phi_3(v) + \phi_4(v)$$

$$= 1{,}67 + 3{,}83 + 4{,}83 + 5{,}67 = 16$$

$$v(I) = 16$$

$$\sum_{i \in I} \phi_i(v) = v(I)$$

Olduğundan dolayı oyun verimlilik açısından uygundur diyebiliriz.

[13] Ahlatçıoğlu, Tiryaki, a.g.e., s.202

3. REKLAM STRATEJİSİ SEÇİMİ VE SHAPLEY DEĞERLERİ UYGULAMASI

Bir bölgede hizmet veren 3 adet mobilya ve ev aksesuarı firması bulunmaktadır [*]. Yabancı bir firma da aynı bölgede aynı pazara hizmet vermek istemekte ve bunun için de ciddi bir miktar ayırmaktadır. Piyasaya girdiği zaman rakip firmalardan müşteri kazanabilecek en etkili reklamı yapabilmek için bir araştırma yapmıştır. Yapılan çalışmalar sonucunda hangi reklam tiplerinin müşterilerin ne kadarını etkilediği, rakip firmalardan ne kadar müşteri kazanma etkisine sahip olduğu aşağıdaki tabloda belirtilmektedir.

Reklam Tipi	Müşteri Kazanma Yüzdesi (%)
Reklam Tip 1	5
Reklam Tip 2	3
Reklam Tip 3	1

Pazara yeni girecek olan firma 3. reklam tipini kullanma imkanına sahip değildir. Ayrıca yapılan reklamların mevcut müşteriler üzerinde anlamlı bir fark oluşturacak etkisi olmamakta ancak rakip firmaların müşterileri üzerinde etkisi olmaktadır.

Yapılan çalışmalarda ayrıca firma büyüklüklerinin de reklam gücüne etkisi olduğu saptanmıştır. Burada geçen firma büyüklük değerleri reklama yapabilecekleri harcama, şube sayısı, ürün çeşitlilikleri gibi değerlere göre belirlenmektedir. Bundan

[*] Firmalara, reklam kampanyalarına ve müşteri yönelimlerine dair anketler ve verileri değerlendirilerek oluşturulmuş hipotetik bir örnektir.

dolayı da bir firmanın diğerlerine göre daha yüksek bir değere sahip olması yaptığı reklam stratejisini daha etkili bir hale getirmektedir. Firmaların mevcut müşteri sayıları ve büyüklük değerleri ayrıca da koalisyon oluşturmaları durumlarındaki müşteri sayıları ve büyüklük değerleri aşağıdaki tabloda gösterilmektedir

Firmalar (Koalisyonlar)	Müşteri Sayıları	Büyüklük Değerleri
Firma 1	6000	8
Firma 2	3000	4
Firma 3	1000	1
Firma 4	--	6
Firma (1 + 2)	9000	13
Firma (1 + 3)	7000	10
Firma (1 + 4)	6000	16
Firma (2 + 3)	4000	6
Firma (2 + 4)	3000	12
Firma (3 + 4)	1000	8
Firma (1 + 2 + 3)	10000	15
Firma (1 + 2 + 4)	9000	21
Firma (1 + 3 + 4)	7000	17
Firma (2 + 3 + 4)	4000	13

3.1. Koalisyon Olmaması Hali

Hiçbir firma arasında koalisyon olmaması halinde oluşacak olan kazanç matrisleri aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

			Firma 3 Reklam Tip 1		
			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 1	Firma 2	RT 1	-1700, -850, -450, 3000	-2340, -370, -290, 3000	-2980, 110, -130, 3000
		RT 2	-1220,-1410,-3700,3000	-1860, -930, -210, 3000	-2500, -450, -50, 3000
		RT 3	-740, -1970, -290, 3000	-1380, -1490, -130, 3000	-2020, -1010, 30, 3000

			Firma 3 Reklam Tip 1		
			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 2	Firma 2	RT 1	-980, -490, -330, 1800	-1620, -10, -170, 1800	-2260, 470, -10, 1800
		RT 2	-500, -1050, -250, 1800	-1140, -570, -90, 1800	-1780, -90, 70, 1800
		RT 3	-20, -1610, -170, 1800	-660, -1130, -10, 1800	-1300, -650, 150, 1800

			Firma 3 Reklam Tip 2		
			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 1	Firma 2	RT 1	-1580, -790, -630, 3000	-2220, -310, -470, 3000	-2860, 170, -310, 3000
		RT 2	-1100,-1350,-550, 3000	-1740, -870, -390, 3000	-2380, -390, -230, 3000
		RT 3	-620, -1910, -470, 3000	-1260,-1430,-310, 3000	-1900, -950, -150, 3000

			Firma 3 Reklam Tip 2		
			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 2	Firma 2	RT 1	-860, -430, -510, 1800	-1500, 50, -350, 1800	-2140, 530, -190, 1800
		RT 2	-380, -990, -430, 1800	-1020, -510, -270, 1800	-1660, -30, -110, 1800
		RT 3	100, -1550, -350, 1800	-540, -1070, -190, 1800	-1180, -590, -30, 1800

			Firma 3 Reklam Tip 3		
			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 1	Firma 2	RT 1	-1460, -730, -810, 3000	-2100, -250, -650, 3000	-2740, 230, -490, 3000
		RT 2	-980, -1290, -730, 3000	-1620, -810, -570, 3000	-2260, -330, -410, 3000
		RT 3	-500, -1850, -650, 3000	-1140,-1370,-490, 3000	-1780, -890, -330, 3000

			Firma 3 Reklam Tip 3		
			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 2	Firma 2	RT 1	-740, -370, -690, 1800	-1380, 110, -530, 1800	-2020, 590, -370, 1800
		RT 2	-260, -930, -610, 1800	-900, -450, -450, 1800	-1540, 30, -290, 1800
		RT 3	220, -1490, -530, 1800	-420, -1010, -370, 1800	-1060, -530, -210, 1800

Burada oluşan kazanç matrislerinin her hücresinde bulunan rakamlar sırasıyla firma 1, firma 2, firma 3 ve firma 4 kazançlarını ifade etmektedir. Firma 1 ‘in stratejileri matrislerin sütunlarıyla, firma 2 ‘nin stratejileri matrislerin satırlarıyla, firma 3 ‘ün stratejiler matris gruplarının sütunları olarak ve firma 4 ‘ün stratejileri ise matris gruplarının satırlarıyla ifade edilmektedir. O halde dış matristen yani 4. ve 3. oyunculardan strateji seçimlerine başlanır.

4. oyuncunun matris boyutunda kazançlarını incelediğimizde reklam 1 stratejisi reklam 2 stratejisinden daha fazla müşteri getireceğinden dolayı (3000 > 1800) 4. oyuncu reklam 2 stratejisini eler ve oyun 3 matrisli bir hale indirgenmiş olur. 4. Oyuncunun hamlesi kalmadığından dolayı 3. oyuncunun hamleleri incelenir.

3 oyuncuyu da matrisler boyutunda incelediğimizde reklam 2 ve reklam 3 stratejilerinin reklam 1 stratejisinden daha fazla müşteri kaybettirmesinden dolayı 3.

oyuncu reklam 2 ve reklam 3 stratejilerini eler. Böylece 3. oyuncunun da strateji seçimleri bitmiş olur.

Böylece 4. ve 3. oyuncunun strateji seçimlerinden sonra oyun matrisimiz olarak geriye sadece 1. matris kalmış olur ve 1. ve 2. oyuncu da doğal olarak strateji seçimlerini ve kazanç değerlendirmelerini sadece bu matris üzerinden yapacaklardır. 1. ve 2. oyuncu da daha az müşteri kaybettirmesinden dolayı reklam 1 stratejisini seçecektir ve denge durumu oyunun ilk matrisinin ilk hücresinde oluşacaktır ve firmaların kazançları da aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$Firma\ 1 = -1700$$

$$Firma\ 2 = -850$$

$$Firma\ 3 = -450$$

$$Firma\ 4 = +3000$$

3.2. Firma (1+2) Koalisyon Hali

Firma 1 ve Firma 2 ‘nin koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

			Firma (1+2)		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 1	Firma 3	RT 1	-2500, -500, 3000	-2760, -240, 3000	-3020, 20, 3000
		RT 2	-2320, -680, 3000	-2580, -420, 3000	-2840, -160, 3000
		RT 3	-2140, -860, 3000	-2400, -600, 3000	-2660, -340, 3000

			Firma (1+2)		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 2	Firma 3	RT 1	-1420, -380, 1800	-1680, -120, 1800	-1940, 140, 1800
		RT 2	-1240, -560, 1800	-1500, -300, 1800	-1760, -40, 1800
		RT 3	-1060, -740, 1800	-1320, -480, 1800	-1580, -220, 1800

Bu oyunda yine dış matristen başladığımız zaman firma 4 reklam 2 stratejisini eler ve ilk oyun matrisi üzerinden kalan firmalar strateji seçimi yaparlar. Firma 3 daha az müşteri kaybedeceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. satırını eler. Aynı şekilde firma (1+2) ‘de 2. ve 3. sütunları eleyecektir. Firmaların kazançları aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$Firma\ (1+2) = -2500$

$Firma\ 3 = -500$

$Firma\ 4 = +3000$

3.3. Firma (1+3) Koalisyon Hali

Firma 1 ve Firma 3 ‘ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

			Firma (1+3)		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 1	Firma 2	RT 1	-2000, -1000, 3000	-2600, -400, 3000	-3200, 200, 3000
		RT 2	-1440, -1560, 3000	-2040, -960, 3000	-2640, -360, 3000
		RT 3	-880, -2120, 3000	-1480, -1520, 3000	-2080, -920, 3000

			Firma (1+3)		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 2	Firma 2	RT 1	-1160, -640, 1800	-1760, -40, 1800	-2360, 560, 1800
		RT 2	-600, -1200, 1800	-1200, -600, 1800	-1800, 0, 1800
		RT 3	-40, -1760, 1800	-640, -1160, 1800	-1240, -560, 1800

Dış matristen başladığımız zaman firma 4 aynı şekilde reklam 2 stratejisini eler ve ilk oyun matrisi üzerinden kalan firmalar strateji seçimi yaparlar. Firma 2 daha az müşteri kaybedeceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. satırını eler. Aynı şekilde firma (1+3) ‘de 2. ve 3. sütunları eleyecektir ve firmaların kazançları aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$Firma\ (1+3) = -2000$

$Firma\ 3 = -1000$

$Firma\ 4 = +3000$

3.4. Firma (1+4) Koalisyon Hali

Firma 1 ve Firma 4 ‘ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

			Firma (1+4)		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 3 RT 1	Firma 2	RT 1	1700, -1150, -550	420, -190, -230	-860, 770, 90
		RT 2	2180, -1710, -470	900, -750, -150	-380, 210, 170
		RT 3	2660, -2270, -390	1380, -1310, -70	100, -350, 250

			Firma (1+4)		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 3 RT 2	Firma 2	RT 1	1820, -1090, -730	540, -130, -410	-740, 830, -90
		RT 2	2300, -1650, -650	1020, -690, -330	-260, 270, -10
		RT 3	2780, -2210, -570	1500, -1250, -250	220, -290, 70

			Firma (1+4)		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 3 RT 3	Firma 2	RT 1	1940, -1030, -910	660, -70, -590	-620, 890, -270
		RT 2	2420, -1590, -830	1140, -630, -510	-140, 330, -190
		RT 3	2900, -2150, -750	1620, -1190, -430	340, -230, -110

Dış matristen başladığımız zaman firma 3 reklam 2 ve reklam 3 stratejilerinin bulunduğu matrisleri eler ve ilk oyun matrisi üzerinden kalan firmalar strateji seçimi yaparlar. Firma 2 daha az müşteri kaybedeceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. satırını eler. Firma (1+4) ‘de daha fazla müşteri kazanacağından dolayı 2. ve 3. sütunları eleyecektir. Firmaların kazançları da aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$Firma\ (1 + 4) = \ +1700$

$Firma\ 2 = \ -1150$

$Firma\ 3 = \ -550$

3.5. Firma (2+3) Koalisyon Hali

Firma 2 ve Firma 3 'ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 1	Firma (2+3)	RT 1	-2000, -1000, 3000	-2640, -360, 3000	-3280, 280, 3000
		RT 2	-1280, -1720, 3000	-1920, -1080, 3000	-2560, -440, 3000
		RT 3	-560, -2440, 3000	-1200, -1800, 3000	-1840, -1160, 3000

			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 4 RT 2	Firma (2+3)	RT 1	-1280, -520, 1800	-1920, 120, 1800	-2560, 760, 1800
		RT 2	-560, -1240, 1800	-1200, -600, 1800	-1840, 40, 1800
		RT 3	160, -1960, 1800	-480, -1320, 1800	-1120, -680, 1800

Dış matristen başladığımız zaman firma 4 reklam 2 stratejisini eler ve ilk oyun matrisi üzerinden kalan firmalar strateji seçimi yaparlar. Firma 1 daha az müşteri kaybedeceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. sütununu eler. Aynı şekilde firma (2+3) 'de 2. ve 3. satırları eleyecek ve firmaların kazançları aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$Firma\ (1+3) = -2000$

$Firma\ 3 = -1000$

$Firma\ 4 = +3000$

3.6. Firma (2+4) Koalisyon Hali

Firma 2 ve Firma 4 ‘ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 3 RT 1	Firma (2+4)	RT 1	-2300, 2850, -550	-2940, 3330, -390	-3580, 3810, -230
		RT 2	-860, 1170, -310	-1500, 1650, -150	-2140, 2130, 10
		RT 3	580, -510, -70	-60, -30, 90	-700, 450, 250

			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 3 RT 2	Firma (2+4)	RT 1	-2180, 2910, -730	-2820, 3390, -570	-3460, 3870, -410
		RT 2	-740, 1230, -490	-1380, 1710, -330	-2020, 2190, -170
		RT 3	700, -450, -250	60, 30, -90	-580, 510, 70

			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F 3 RT 3	Firma (2+4)	RT 1	-2060, 2970, -910	-2700, 3450, -750	-3340, 3930, -590
		RT 2	-620, 1290, -670	-1260, 1770, -510	-1900, 2250, -350
		RT 3	820, -390, -430	180, 90, -270	-460, 570, -110

Firma 3 ‘ün stratejilerini içeren dış matrislerden başladığımız zaman firma 3 reklam 2 ve reklam 3 stratejilerinin bulunduğu matrisleri eler ve ilk oyun matrisi üzerinden kalan firmalar strateji seçimi yaparlar. Firma 1 daha az müşteri kaybedeceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. sütunlarını eler. Firma (2+4) ‘de daha fazla müşteri kazanacağından dolayı 2. ve 3. satırları eleyecektir. Firmaların kazançları da aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$Firma\ 1 = -2300$

$Firma\ (2+4) = +2850$

$Firma\ 3 = -550$

3.7. Firma (3+4) Koalisyon Hali

Firma 3 ve Firma 4 ‘ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3">Firma 1</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>RT 1</td><td>RT 2</td><td>RT 3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">F(3+4) RT 1</td><td rowspan="3">Firma 2</td><td>RT 1</td><td>-2000, -1000, 3000</td><td>-2640, -520, 3160</td><td>-3280, -40, 3320</td></tr>
<tr><td>RT 2</td><td>-1520, -1560, 3080</td><td>-2160, -1080, 3240</td><td>-2800, -600, 3400</td></tr>
<tr><td>RT 3</td><td>-1040, -2120, 3160</td><td>-1680, -1640, 3320</td><td>-2320, -1160, 3480</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3">Firma 1</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>RT 1</td><td>RT 2</td><td>RT 3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">F(3+4) RT 2</td><td rowspan="3">Firma 2</td><td>RT 1</td><td>-1040, -520, 1560</td><td>-1680, -40, 1720</td><td>-2320, 440, 1880</td></tr>
<tr><td>RT 2</td><td>-560, -1080, 1640</td><td>-1200, -600, 1800</td><td>-1840, -120, 1960</td></tr>
<tr><td>RT 3</td><td>-80, -1640, 1720</td><td>-720, -1160, 1880</td><td>-1360, -680, 2040</td></tr>
</table>

			Firma 1		
			RT 1	RT 2	RT 3
F(3+4) RT 3	Firma 2	RT 1	-80, -40, 120	-720, 440, 280	-1360, 920, 440
		RT 2	400, -600, 200	-240, -120, 360	-880, 360, 520
		RT 3	880, -1160, 280	240, -680, 440	-400, -200, 600

Firma (3+4) strateji matrislerden reklam 2 ve reklam 3 stratejilerinin bulunduğu matrisleri daha az müşteri getireceğinden dolayı eler ve ilk oyun matrisi üzerinden kalan firmalar strateji seçimi yaparlar. Firma 1 daha az müşteri kaybettireceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. sütunlarını eler. Firma 2 de daha az müşteri kaybettireceğinden dolayı 2. ve 3. satırları eleyecektir. Firmaların kazançları da aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$Firma\ 1 = -2000$

$Firma\ (2+4) = -1000$

$Firma\ 3 = +3000$

3.8. Firma (1+2+3) Koalisyon Hali

Firma 1, Firma 2 ve Firma 3 ‘ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisi aşağıdaki şekilde olacaktır:

		Firma $(1+2+3)$		
		RT 1	RT 2	RT 3
Firma 4	RT 1	-3000, 3000	-3000, 3000	-3000, 3000
	RT 2	-1800, 1800	-1800, 1800	-1800, 1800
	RT 3	-600, 600	-600, 600	-600, 600

Firma (1+2+3) ‘ün reklam 1, reklam 2 ve reklam 3 stratejilerinin bulunduğu sütunlar eşit kazanca sahiptir; oyun Firma 4 ‘ün strateji seçimi üzerinden devam edecektir. Firma 4 de daha fazla müşteri kazancından dolayı matrisin 2. ve 3. satırlarını eler. Oyunun denge durumunda firmaların kazançları aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$$Firma\ (1 + 2 + 3) = -3000$$

$$Firma\ 4 = +3000$$

3.9. Firma (1+2+4) Koalisyon Hali

Firma 1, Firma 2 ve Firma 4 ‘ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisi aşağıdaki şekilde olacaktır:

		Firma (1 + 2 + 4)		
		RT 1	RT 2	RT 3
Firma 3	RT 1	600, -600	180, -180	-240, 240
	RT 2	780, -780	360, -360	-60, 60
	RT 3	960, -960	540, -540	120, -120

Firma (1+2+4) reklam 1 daha fazla müşteri getireceğinden dolayı reklam 2 ve reklam 3 stratejilerinin bulunduğu sütunları eleyecek, oyun ilk sütunda Firma 3 ‘ün strateji seçimi üzerinden devam edecektir. Firma 3 de daha az müşteri kaybettireceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. satırlarını eler. Oyunun denge durumunda firmaların kazançları aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$$Firma\ (1 + 2 + 4) = +600$$

$$Firma\ 3 = -600$$

3.10. Firma (1+3+4) Koalisyon Hali

Firma 1, Firma 3 ve Firma 4 ‘ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisi aşağıdaki şekilde olacaktır:

		Firma $(1+3+4)$		
		RT 1	RT 2	RT 3
Firma 2	RT 1	1150, -1150	130, -130	-890, 890
	RT 2	1710, -1710	690, -690	-330, 330
	RT 3	2270, -2270	1250, -1250	230, -230

Firma (1+3+4) reklam 1 stratejisi daha fazla müşteri getireceğinden dolayı reklam 2 ve reklam 3 stratejilerinin bulunduğu sütunlar eleyecek, oyun ilk sütunda Firma 2 ‘nin strateji seçimi üzerinden devam edecektir. Firma 2 de daha az müşteri kaybettireceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. satırlarını eler. Oyunun denge durumunda firmaların kazançları aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$$Firma\ (1+2+4) = +1150$$

$$Firma\ 3 = -1150$$

3.11. Firma (2+3+4) Koalisyon Hali

Firma 2, Firma 3 ve Firma 4 ‘ün koalisyon oluşturmaları halinde oluşacak kazanç matrisi aşağıdaki şekilde olacaktır:

		Firma 1		
		RT 1	RT 2	RT 3
Firma (2 + 3 + 4)	RT 1	-2300, 2300	-2940, 2940	-3580, 3580
	RT 2	2680, -2680	1320, -1320	-40, 40
	RT 3	3160, -3160	1800, -1800	440, -440

Firma (2+3+4) reklam 1 stratejisi daha fazla müşteri getireceğinden dolayı reklam 2 ve reklam 3 stratejilerinin bulunduğu satırları eleyecek, oyun ilk satırda Firma 1 ‘in strateji seçimi üzerinden devam edecektir. Firma 1 de daha az müşteri kaybettireceğinden dolayı matrisin 2. ve 3. sütunlarını eler. Oyunun denge durumunda firmaların kazançları aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$Firma\,1 = -2300$

$Firma\,(2+3+4) = +2300$

3.12. Shapley Değerlerinin Hesaplanması

Oyuncuların (Firmaların) Shapley değerlerini hesaplamadan önce firmaların tek olarak kazançları toplamları ile koalisyon hallerinde elde ettikleri kazançların karşılaştırmalı tablosunu inceleyelim:

Koalisyon	∅	1	2	3	4	{1.2}	{1,3}	{1,4}	{2,3}
Ayrı Toplamları	0	-1700	-850	-450	3000	-2550	-2150	1300	-1300
Koalisyon Kazançları	0	-1700	-850	-450	3000	-2500	-2000	1700	-1000

Koalisyon	{2,4}	{3,4}	{1,2,3}	{2,3,4}	{1,3,4}	{1,2,4}	{1,2,3,4}
Ayrı Toplamları	2150	2550	-3000	1700	850	450	10000
Koalisyon Kazançları	2850	3000	-3000	2300	1150	600	10000

Tablodan da anlaşılabileceği gibi; firmaların birbirleriyle koalisyon hallerinde elde edebilecekleri değerler koalisyonda yer alan firmaların ayrı ayrı elde edebilecekleri miktarların toplamına eşit ya da toplamından daha fazladır. Shapley değerlerini bulmaya yardımcı olacak tablo çıkarılırsa:

Koalisyon	∅	1	2	3	4	{1.2}	{1,3}	{1,4}	{2,3}
Kazançları	0	-1700	-850	-450	3000	-2500	-2000	1700	-1000
$\Delta_v(K)$	0	-1700	-850	-450	3000	50	150	400	300

Koalisyon	{2,4}	{3,4}	{1,2,3}	{2,3,4}	{1,3,4}	{1,2,4}	{1,2,3,4}
Kazançları	2850	3000	-3000	2300	1150	600	0
$\Delta_v(K)$	700	450	-500	-850	-700	-1000	1000

$$\emptyset_1(v) = \frac{-1700}{1} + \frac{50}{2} + \frac{150}{2} + \frac{400}{2} + \frac{-500}{3} + \frac{-700}{3} + \frac{-1000}{3} + \frac{1000}{4} = -1883{,}333$$

$$\emptyset_2(v) = \frac{-850}{1} + \frac{50}{2} + \frac{300}{2} + \frac{700}{2} + \frac{-500}{3} + \frac{-850}{3} + \frac{-1000}{3} + \frac{1000}{4} = -858{,}333$$

$$\emptyset_3(v) = \frac{-450}{1} + \frac{150}{2} + \frac{300}{2} + \frac{450}{2} + \frac{-500}{3} + \frac{-850}{3} + \frac{-700}{3} + \frac{1000}{4} = -433{,}333$$

$$\emptyset_4(v) = \frac{3000}{1} + \frac{400}{2} + \frac{700}{2} + \frac{450}{2} + \frac{-850}{3} + \frac{-700}{3} + \frac{-1000}{3} + \frac{1000}{4} = 3175$$

Burada elde edilen Shapley değerleri, firmaların mevcut müşteri sayıları dikkate alınmadan, sadece müşteri değişimleri dikkate alınarak oluşturulduğundan dolayı bu şekilde sonuçlanmıştır. Firmaların mevcut müşteri sayıları da dikkate alınarak kazançların karşılaştırmalı tablosunu yeniden düzenlersek:

Koalisyon	Ø	1	2	3	4	{1.2}	{1,3}	{1,4}	{2,3}
Ayrı Toplamları	0	4300	2150	550	3000	6450	4850	7300	2700
Koalisyon Kazançları	0	4300	2150	550	3000	6500	5000	7700	3000

Koalisyon	{2,4}	{3,4}	{1,2,3}	{2,3,4}	{1,3,4}	{1,2,4}	{1,2,3,4}
Ayrı Toplamları	5150	3550	7000	5700	7850	9450	10000
Koalisyon Kazançları	5850	4000	7000	6300	8150	9600	10000

Bu tablo yardımıyla Shapley değerlerini hesaplama da kullanılacak yardımcı yeni tablo aşağıdaki gibi oluşacaktır:

Koalisyon	Ø	1	2	3	4	{1.2}	{1,3}	{1,4}	{2,3}
Kazançları	0	4300	2150	550	3000	6500	5000	7700	3000
$\Delta_v(K)$	0	4300	2150	550	3000	50	150	400	300

Koalisyon	{2,4}	{3,4}	{1,2,3}	{2,3,4}	{1,3,4}	{1,2,4}	{1,2,3,4}
Kazançları	5850	4000	7000	6300	8150	9600	10000
$\Delta_v(K)$	700	450	-500	-850	-700	-1000	1000

$$\emptyset_1(v) = \frac{4300}{1} + \frac{50}{2} + \frac{150}{2} + \frac{400}{2} + \frac{-500}{3} + \frac{-700}{3} + \frac{-1000}{3} + \frac{1000}{4} = 4116{,}667$$

$$\emptyset_2(v) = \frac{2150}{1} + \frac{50}{2} + \frac{300}{2} + \frac{700}{2} + \frac{-500}{3} + \frac{-850}{3} + \frac{-1000}{3} + \frac{1000}{4} = 2141{,}667$$

$$\emptyset_3(v) = \frac{550}{1} + \frac{150}{2} + \frac{300}{2} + \frac{450}{2} + \frac{-500}{3} + \frac{-850}{3} + \frac{-700}{3} + \frac{1000}{4} = 566{,}667$$

$$\emptyset_4(v) = \frac{3000}{1} + \frac{400}{2} + \frac{700}{2} + \frac{450}{2} + \frac{-850}{3} + \frac{-700}{3} + \frac{-1000}{3} + \frac{1000}{4} = 3175$$

Firmaların mevcut müşteri sayıları da dikkate alınarak hesaplanan yeni Shapley değerlerine göre; Firma 1 4116,667 değeri ile en yüksek Shapley değerine sahiptir. 3175 değeri ile Firma 4 ikinci sırada, 2141,667 değeri ile Firma 2 üçüncü sırada ve son sırada 566,667 değeri ile Firma 3 yer almaktadır. Bulmuş olduğumuz Shapley değerleri Aynı zamanda firmaların piyasa güçlerini de temsil etmektedir. Bulmuş olduğumuz Shapley değerlerinin toplamı ve ana koalisyon halindeki Shapley değerinin eşitlik durumunu incelersek:

$$v(I) = 10000$$

$$\sum_{i \in I} \phi_i(v) = 4116{,}667 + 2141{,}667 + 566{,}667 + 3175 = 10000$$

olduğuna göre ana koalisyon Shapley değeri ile oyunda yer alan oyuncuların Shapley değerleri toplamı birbirine eşit çıkmaktadır.

$$v(I) = \sum_{i \in I} \phi_i(v) = 10000$$

SONUÇ

Bu çalışmaya birinci bölümde yer alan iki kişili oyunlar ile başlanmasının nedeni; ikinci bölümde yer alan çok kişili oyunlara ve üçüncü bölümde yer alan uygulamaya temel oluşturmak ve bunların aktarımını kolaylaştırmaktır. Çalışmanın ikinci bölümünde; uygulamada da birçoğu kullanılan, konunun teorik bilgileri örneklerle aktarılmıştır. İlk iki kısımdaki bilgilerden de faydalanarak, uygulama bölümünde yer alan oyun modeli; Firma 4'ün piyasaya ilk girdiği anda; çeşitli formlarıyla birlikte değerlendirilmiş ve oyuncuların piyasa gücünü bulmak amacıyla Shapley değerleri elde edilmiştir.

Çok kişili oyunlarda; oyuncular oyunda yer alan doğru stratejiyi seçmelerinin yanında, alternatif hamleler de uygulayabilmektedirler. Bu alternatiflerden bir tanesi de koalisyonlar oluşturmaktır. Oyuncular, oluşturabilecekleri koalisyonlarla; koalisyonda yer almayan rakiplerine karşı birlikte daha fazla üstünlük sağlayabilmektedirler. Bu üstünlükler oyuna, sektöre, firmalara göre değişik şekillerde olabilmektedir. Bu çalışmada yapılan uygulamada firmalar, koalisyonlarla, rakiplerine karşı şube sayısı, ürün çeşitliliği gibi avantajlar sağlamakta ve dolayısıyla da daha etkili reklam stratejileri elde edebilmektedirler. Koalisyonlar sonrasında yapılabilecek reklam stratejileriyle de gerek rakiplerinden gerekse de koalisyonsuz durumlarından daha fazla müşteri kazanabilmektedirler.

Uygulamalarda koalisyonsuz ve koalisyonlu oyun formlarının sonuçlarını incelediğimizde, müşteri sayısı fazla olan büyük firmaların daha fazla müşteri kaybettiği görülmektedir. Bu sayıları firmaların toplam müşteri sayılarına oranlayıp yüzdesel olarak incelediğimiz takdirde, müşteri kayıplarında büyük firmaların daha az yüzdeye sahip olduğu görülür.

Oyuncuların Shapley değerlerinin bulunduğu ilk kısımda Firma 1'in Shapley değerinin en düşük olması, uygulamanın müşteri kayıplarına/kazançlarına göre yapılmış olmasından kaynaklanmaktadır. Daha sonra nihai müşteri sayılarıyla yeniden hesaplandığı takdirde Firma 1'in 4116,667 ile en yüksek ve Firma 3'ün 566,667 ile en düşük Shapley değerlerine sahip olduğu görülmüştür. Uygulamada ayrıca, oyunda yer alan tüm firmaların Shapley değerlerinin toplamı ile ana koalisyonun Shapley değerinin birbirine eşit çıktığı da gösterilmiştir. Büyük firmalar, küçük firmalara göre daha fazla müşteri kaybetse de; oransal olarak incelendiğinde, mevcut müşterilerini daha az oranda kaybetmekte aynı zamanda da daha fazla müşteri kazanabilmektedirler.

Ayrıca, bu çalışmaya ek olarak; firmalara ve stratejilerine dair değişken ve sürekli uzun dönem oyun modelleri kurularak ve gerekli duyarlılık analizleri yapılarak uzun dönem için de firmaların daha etkili kararlar alabilmelerini sağlayacak sonuçlar elde edilebilecektir.

KAYNAKLAR

Ahlatçıoğlu, Mehmet, Tiryaki, Fatma:	Oyunlar Teorisi, İstanbul, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, 1998.
Al-Rabadi, Anas N.	“Reversible Error Correction in Decisions Communication within Quantum Game-Theoretic Bijectivity”, Game Theory: Strategies, Equilibria, and Theorems, Ed. Ingrid N. Haugen, Anna S. Nilsen, New York, Nova Science Publishers inc., 2009.
Ed. Robert Aumann, Sergiu Hart	Handbook of Game Theory with Economic Applications, C.I-II-III, Hollanda, Elsevier Science B.V., 1992-1994-2002.
Baird, Douglas G., Gertner, Robert H., Picker, Randal C.	Game Theory and the Law, Cambridge, Harvard University Press, 1994.
Darwin, Charles	The Descents of Man and selection in relation to sex, New York, D. Appleton and Company, C.I-II, 1871.
Edgeworth, Francis Ysidro	Mathematical Psychics: An Essay On the Application of Mathematics to the Moral Sciences, London, C. Kegan Paul & Co., 1881.
Finus, Michael	Game Theory and International Environmental Cooperation, UK, Edward Elgar Publishing Inc., 2001.
Gibbons, Robert	A Primer in Game Theory, Malezya, Princeton University Press, 1992.

Gilles, Robert P. — Theory and Decision Library Series C: Game Theory Mathematical Programming and Operations Research Volume 44, "The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

Harsanyi, John C. — A General Theory of Rational Behavior in Game Situations, Econometrica, C.34, N.3, Temmuz 1966, s.613-634.

Harsanyi, John C. — Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players Part I-II-III, Management Science, C.14, 1968, s.159-182; N.5 s.320-334; N.7 s.486-502.

Harsanyi, John C. — Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed-Strategy Equilibriuum Points, International Journal of Game Theory, C.2, N.1, 1973, s.1-23.

Kalmàr, Lazslo — Zur Theorie der Abstrakten Spiele, Acta Sci. Math., Szeged 4, 1928/29, s.65-85.

König, Denes — Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, Acta Sci. Math., Szeged 3, 1927, s.121-130.

Kreps, David M. — A Course in MicroEconomic Theory, Princeton, Princeton University Press, 1990.

Lemke, C. E., Howson, J. T. — Equilibrium Points of Bimatrix Games, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, C.12, N.2, Haziran 1964, s.413-423.

Loomis, Lynn H. — On a Theorem of von Neumann, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, C.32, N.8, 15 Ağustos 1946, s.213-215.

Nash, John F. — Equilibrium Points in N-Person Games, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, C.36, N.1, 15 Ocak 1950, s.48-49.

Nash, John F. — Bargaining Problem, Econometrica, C.18, N.2, Nisan 1950, s.155-162.

Nash, John — Non-Cooperative Games, The Annals of Mathematics, 2.seri, C.54, N.2, Eylül 1951, s.286-295.

Nash, John — Two-Person Cooperative Games, Econometrica, C.21, N.1, Ocak 1953, s.128-140.

Osborne, Martin J., Rubinstein, Ariel — A Course in Game Theory, Londra, İngiltere, Massachusetts Institute of Technology Press, 1998.

Rapoport, Anatol — N-Person Game Theory Concepts and Applications, USA, The University of Michigan Press, 1970.

Rasmusen, Eric	An Introduction to Game Theory, Massachusetts, Blackwell Publisher, 2005.
Roth, Alvin E.	“Introduction to the Shapley Value”, The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley, Ed. Alvin E. Roth, New York, Cambridge University Press, 1988.
Schalk, Andres	The Theory of Games and Game Models, Manchester Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Departmanı, Eylül 2003.
Schmidt, Christian	Game Theory and Economic Analysis: A Quiet Revolution in Economics, Ed. Christian Schmidt, London, Routledge Taylor & Francis Group, 2002.
Schwalbe, Ulrich, Walker, Paul	Zermelo and the Early History of Game Theory, C.34, Games and Economic Behaviour, 2001, s.123-137.
Thie, Paul R., Keough, Gerard E.	An Introduction to Linear Programming and Game Theory, 3.bs, USA, John Wiley & Sons Inc., 2008.
Von Numann, John, Morgenstern, Oskar	Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, Princeton University Press, 6. bs, 1955.
Von Numann, John	Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen, C.100, N.1, 1928, 302-303.

Von Numann, John	On the Theory of Games of Strategy, Contributions to the Theory of Games, Ed. A. W. Tucker, R. D. Luce, Princeton, Princeton University Press, C.IV, 1959, s.13-42.
Winter, Eyal	“The Shapley Value”, Handbook of Game Theory with Economic Applications, C.III, Ed. Robert Aumann, Sergiu Hart, Hollanda, Elsevier Science B.V., 2002.
Zermelo, Ernest	Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Cambridge, Cambridge University Press, C.II, 1913, s.501-504.